차 례

상식

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《학교들에 여러가지 학습참고서와 과외도서를 많이 출판하여 보내주어야 합니다.》

위대한 장군님께서는 학생들을 풍부한 지식과 높은 활용능력을 가진 유능한 혁명인재로 키우시기 위하여 학생들에게 여러가지 학습참고서와 과외도서를 그들의 나이와 심리, 지적발전수준에 맞게 잘 만들어 많이 보내줄데 대한 크나큰 사랑과 은정을 돌려주시였다.

위대한 장군님의 말씀을 높이 받들고 출판사는 위대한 수령님의 탄생 100돐을 맞으면서 중학교 학생들을 위한 수학편람을 내보내게 된다.

이 책은 이미 배운 수학지식을 공고히 다지고 그에 대한 응용능력을 키워나가는 학생들의 수학학습을 돕기 위한 과외학습참고서이다.

이 책에서는 먼저 수학의 기본지식을 주었다. 여기서는 수학적개념, 성질, 규칙 등을 간단명료하게 주었다. 그리고 해당한 실례를 주었다.

이 책에서는 또한 수학공식과 수학의 발견, 발명년대표와 상식을 주었고 마지막에 찾아보기를 주었다.

학생들의 첫째가는 임무는 학습이라고 하신 위대한 장군님의 말씀을 높이 받들고 학생들은 열심히 공부하여 선군시대 사회주의강성국가를 건설해나가는 나라의 역군으로 자라나야 할것이다.

제1장. 수

1. 자 연 수

[자연수]

물건의 개수나 차례를 나타낼 때 쓰는 수 1, 2, 3, 4, … 를 **자연수**라고 부른다. 자연수전체의 모임을 N으로 표시한다. 자연수에서 가장 작은 수는 1이다. 자연수는 끝없이 많으므로 제일 큰 수를 말할수 없다. 물건의 개수를 세거나 량을 잴 때 하나로 보는 량을 **단위**라고 부른다.

[10진수, 10진법]

하나가 10개 모이면 열, 열이 10개 모이면 백, … 이런 식으로 열씩 모이면 그 웃단위로 올려서 수를 적는 방법을 **10진법**, 10진법으로 표시한 수를 **10진수**라고 부른다.

[자연수의 산법]

자연수의 산법에는 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기가 있다. 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기를 통털어 **사칙산법**이라고 부른다. 여기서 더하기, 곱하기가 기본산법으로 되며 덜기와 나누기는 각각 더하기, 곱하기의 거꿀산법으로 된다.

— **더하기**

자연수 a로부터 b만큼 큰 수를 나타내는 수를 구하는 산법을 **더하기**라고 부르고 $a+b$로 표시한다. 그리고 $a+b$의 값을 a와 b의 **합**이라고 부르며 a, b를 각각 **더하는수**라고 부른다.

※ 수축에서 a를 표시하는 점으로부터 오른쪽으로 b만큼 가면 $a+b$를 표시하는 점이 있다.

○ **더하기의 성질**

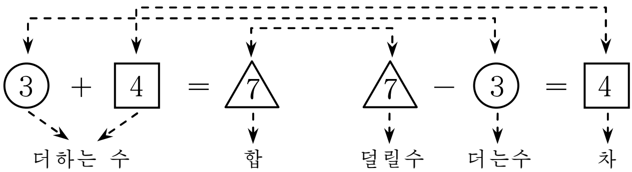
① $a+b=b+a$ (바꿈법칙)

② $(a+b)+c=a+(b+c)$ (묶음법칙)

– **덜기**

합과 한 더하는수를 알고 다른 더하는수를 구하는 산법을 **덜기**라고 부른다. 이런 의미에서 덜기를 더하기의 거꿀산법이라고 말하는것이다.

수 a에서 b를 더는 산법을 $a-b$로 표시하며 그 값을 a에서 b를 던 **차**라고 부른다. 그리고 a를 **덜릴수**, b를 **더는수**라고 부른다.



※ 더하기와 덜기가 섞인 식의 계산

더하기로 고치거나 덜기로 고쳐서 계산한다.

$$a-(-b) \underset{\text{덜기로}}{\overset{\text{더하기로}}{\Leftrightarrow}} a+b \qquad a+(-b) \underset{\text{더하기로}}{\overset{\text{덜기로}}{\Leftrightarrow}} a-b$$

상 식

아라비아수자

수자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9를 **아라비아수자**라고 부른다. 이 수자는 원래 인디아에서 생겨 8세기경에 아라비아에서 전해졌고 12세기에는 아라비아로부터 유럽에로 넘어갔다. 유럽사람들은 이 수자를 아라비아수자라고 부르면서 받아들였다. 수자에는 아라비아수자외에 한자수자, 로마수자 등이 있다.

한자수자 (一), (二), (三), (四), (五), (六), (七), (八), (九), (十)

로마수자 Ⅰ(1), Ⅴ(5), Ⅹ(10), L(50), C(100), D(500), M(1 000)

※ 로마수자로 수를 표시하는 실례

Ⅱ(2), Ⅲ(3), Ⅳ(4), Ⅵ(6), Ⅸ(9), ⅩⅡ(12), CLXⅡ(162)

— **곱하기**

수 a를 b번 더한 합을 구하는 산법을 **곱하기**라고 부르고 $a\times b$로 표시한다. 그리고 $a\times b$의 값을 a와 b의 **적**이라고 부르며 a, b를 각각 **곱하는수** 또는 **인수**라고 부른다.

○ **곱하기의 성질**

① $a\times b=b\times a$ （바꿈법칙）

② $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ （묶음법칙）

③ $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ （분배법칙）

④ $a\times 0=0,\quad 0\times a=0$

⑤ $a\times 1=a,\ \ 1\times a=a$

— **제곱**

같은 인수들의 적을 다음과 같이 표시하는것을 **제곱**이라고 부르고 다음과 같이 읽는다.

$$a\times a\times a=a^3$$ （a의 3제곱）

$$a\cdot a\cdot a=a^3$$

지수 (3), 밀수 (a)

［례］ $11\cdot 11\cdot 11\cdot 11=11^4$

$$125\cdot 49=5\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7=5^3\cdot 7^2$$

$$35607=3\times 10000+5\times 1000+6\times 100+7$$

$$=3\times 10^4+5\times 10^3+6\times 10^2+7$$

○ **지수법칙**

① $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　② $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　③ $(a^m)^n=a^{mn}$

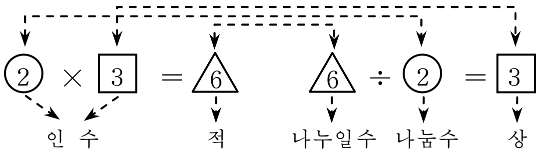
④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$　⑤ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

— **나누기**

나누기는 적과 한 인수를 알고 다른 인수를 구하는 산법이다. 즉 $a\times b=c$에서 c와 a를 알고 b를 구하는 산법을 **나누기**라고 부르고 $c\div a$와 같이 표시한다. 그리고

$c \div a$ 의 값을 c 를 a 로 나눈 **상**이라고 부르며 c 를 **나누일수**, a 를 **나눔수**라고 부른다. 이때 $a \neq 0$ 이다. 그리고

$$c \div a = b \Leftrightarrow a \times b = c$$



※ 0으로의 나누기는 하지 않는다. 그 리유는 다음과 같다.

$a \div 0 = x$ 라고 하자. 이 나누기는 뜻으로 보아 $0 \times x = a$ 에 맞는 x 를 구하는것인데 $a \neq 0$ 이면 여기에 맞는 x 는 하나도 없고 $a = 0$ 이면 x 가 어떤 수라도 된다. 즉 $0 \times x = 0$ 에 맞는 x 는 끝없이 많다. 그러므로 $a \div 0$ 은 계산할수 없다.

나누기에서는 다음과 같은 사실이 성립한다.

$$a \div 1 = a, \quad a \div a = 1(a \neq 0), \quad 0 \div a = 0(a \neq 0)$$

이것은 나누기의 뜻으로 보아 명백하다.

상 식

수학의 《왕》 가우스의 기발한 계산

수학의 《왕》으로 알려졌던 도이췰란드의 수학자 가우스는 어렸을 때부터 수학에 뛰여난 재능을 가지고있었다. 가우스가 소학교 3학년에 다닐 때의 일이다. 어느날 선생님이 1부터 100까지의 수들을 전부 합하면 얼마인가고 물었다. 학생들이 이 문제를 푸느라고 머리를 짜며 부산을 피우고있을 때 가우스는 그 자리에서 5 050이라고 대답하여 선생님을 깜짝 놀라게 하였다.

가우스는 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccrcr} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ +\,) & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

$2S = 101 \times 100$

$\therefore\ S = 5050$

[자연수모임의 닫김성]

자연수모임의 임의의 두 원소에 어떤 산법을 실시하였을 때 그 결과가 자연수이면 자연수모임은 그 산법에 관하여 닫긴다고 말하고 산법의 결과가 자연수로 되지 않으면 그 산법에 관하여 자연수모임은 닫기지 않는다고 말한다. 자연수모임은 더하기, 곱하기(자연수제곱도 포함)산법에 관하여 닫기지만 덜기, 나누기산법에 관해서는 닫기지 않는다.

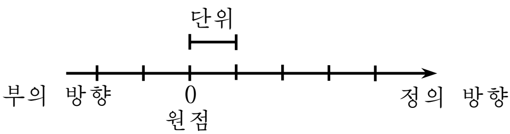
자연수모임 N의 임의의 두 자연수를 m, n이라고 하면 $m+n$, $m\times n$은 늘 자연수이다. 그러나 $m=3$, $n=5$이면 $3-5=-2\notin \mathrm{N}$, $(3\div 5)\notin \mathrm{N}$

2. 옹근수

[수축]

원점(기준점)과 방향, 단위가 정해진 직선을 **수축**이라고 부른다.

직선에 원점과 방향, 단위가 정해지면 모든 수를 직선의 점으로 표시할수 있다.



수축의 원점은 0(령)으로 표시하며 단위는 적당한 길이로 정한다. 그리고 방향도 마음대로 정하나 보통 오른쪽(또는 웃쪽)으로 한다. 수축에서 화살표방향을 **정의 방향**, 그 반대방향을 **부의 방향**이라고 부른다.

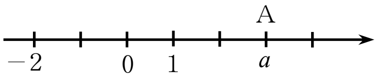
[정수와 부수]

수축우에서 원점으로부터 수축의 오른쪽방향에 배치되여있는 수들을 **정수**라고 부른다. 정수는 수자앞에 +(플루스부호)를 가지고있으나 보통 수자만 쓴다. 그리고 원

점으로부터 수축의 왼쪽방향에 배치되여있는 수들을 **부수**라고 부른다. 부수는 수자앞에 －(미누스부호)를 붙여 표시한다.

[자리표]

점 a의 자리를 표시하는 수 a를 점 A의 **자리표**라고 부르고 A(a)와 같이 표시한다.



[반대수]

부호만이 서로 다른 수들을 서로 **반대수**라고 부른다.

［례］ 3의 반대수 －3, －18의 반대수 18

수 0의 반대수는 그자체이다.

※ 수축에서 원점으로부터 서로 반대쪽으로 같은 거리에 있는 점들을 표시하는 두 수는 서로 반대수로 된다.

어떤 수의 반대수의 반대수는 그자체이다. $-(-a)=a$

[절대값]

수축에서 원점으로부터 어떤 수를 표시하는 점까지의 거리를 그 수의 **절대값**이라고 부른다.

수 a의 절대값을 $|a|$로 표시한다.

절대값의 정의로부터 수 a가 정수이거나 0이면 그자체를, 수 a가 부수이면 그 반대수를 수 a의 절대값이라고 부른다.

$$\text{즉}\quad |a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

[옹근수]

자연수의 반대수를 **부의 옹근수**라고 부른다. 이에 비추어 자연수를 **정의 옹근수**라고 부른다.

부의 옹근수, 령, 정의 옹근수를 통털어 **옹근수**라고 부른다.

옹근수전체의 모임을 Z로 표시한다.

[옹근수의 산법]

— 더하기

부호가 같은 두 옹근수의 더하기는 그 수들의 절대값을 더하고 그 합에 그 수들의 부호를 달아주면 된다.

［례］ $+5+(+8)=+(5+8)=+13$

$-7+(-9)=-(7+9)=-16$

부호가 서로 다른 두 옹근수의 더하기는 절대값이 큰 수에서 절대값이 작은 수를 덜고 그 차에 절대값이 큰 수의 부호를 달아주면 된다.

［례］ $+18+(-13)=+(18-13)=+5$

$+13+(-18)=-(18-13)=-5$

○ 더하기의 성질

① $a+b=b+a$ (바꿈법칙)

특히 $a+(-a)=-a+a=0$

$a+0=0+a=a$

② $(a+b)+c=a+(b+c)$ (묶음법칙)

— 덜기

어떤 수에서 한 수를 덜자면 그 더는수의 반대수를 더하면 된다. 즉

$$a-b=a+(-b)$$

반대수

［례］ $3-7=3+(-7)=-4$

$-5-(-9)=-5+9=4$

식을 더하기만 있는 식으로 고쳤을 때 매개 수를 주어진 **식의 마디**라고 부른다.

$$\underline{(-2)}+\underline{8}+\underline{(-3)}+\underline{7}$$

— 곱하기

두 수의 곱하기규칙은 다음과 같다.

① 부호가 같은 두 수의 적은 곱하는 수들의 절대값의 적과 같다.

② 부호가 다른 두 수의 적은 그 수들의 절대값들의 적에 —를 단것과 같다.

정수×정수⇒정수
정수×부수⇒부수
부수×정수⇒부수
부수×부수⇒정수

일반적으로 여러개 수의 곱하기에서 부호규칙은 다음과 같다.

$$\underbrace{(-1)\times(-1)\times\cdots\times(-1)}_{n}=(-1)^n=\begin{cases}1: & n\text{이 짝수}\\ -1: & n\text{이 홀수}\end{cases}$$

○ **곱하기의 성질**

① $a\times b=b\times a$ (바꿈법칙)

특히 $a\times1=1\times a=a,\quad a\times0=0\times a=0$

$a\times(-1)=(-1)\times a=-a$

② $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (묶음법칙)

③ $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ (분배법칙)

— **제곱**

○ $a<0$ 일 때

n 이 짝수이면 $a^n>0$ 이다.

n 이 홀수이면 $a^n<0$ 이다. n: 자연수

○ $a>0$ 일 때는 늘 $a^n>0$

부의 옹근수에서도 정의 옹근수에서와 같이 지수법칙이 그대로 성립한다.

① $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ② $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$ ④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

⑤ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

여기서 m, n 은 자연수이다.

– **나누기**

두 수의 나누기규칙은 다음과 같다.

① 부호가 같은 두 수의 상은 그 수들의 절대값들의 상과 같다.

② 부호가 다른 두 수의 상은 그 수들의 절대값들의 상에 －를 단것과 같다.

정수÷정수⇒정수

정수÷부수⇒부수

부수÷정수⇒부수

부수÷부수⇒정수

[옹근수모임의 닫김성]

옹근수모임의 수들에 어떤 산법을 실시하였을 때 얻어진 결과가 옹근수로 되면 옹근수모임은 그 산법에 관하여 닫긴다고 하고 그렇지 않으면 닫기지 않는다고 말한다.

옹근수모임은 더하기, 덜기, 곱하기산법에 관하여 닫기지만 나누기산법에 관해서는 닫기지 않는다. 즉 옹근수모임을 Z라고 할 때 Z의 임의의 두 원소 m, n에 대하여 $(m+n)\in Z$, $(m-n)\in Z$, $(m\times n)\in Z$ 이지만 $(m\div n)\notin Z$ 로 되는 m, n이 있다.

［례］ $m=4$, $n=3$이면 $4\div 3$은 옹근수가 아니다.
이런 수들은 얼마든지 많다.

[나머지 있는 나누기]

옹근수 a를 자연수 b로 나눌 때 상이 m이고 나머지가 r이면(m은 옹근수)

$$a=b\times m+r \quad (r<b)$$

모양으로 쓸수 있다.

이와 같은 나누기를 **나머지 있는 나누기**라고 부른다.

이때 m을 **상**, r를 **나머지**라고 부른다.

［례］ $13=6\times2+1$

이므로 13을 6으로 나눌 때의 상은 2, 나머지는 1이다.

[나머지 없는 나누기]

옹근수 a가 자연수 b로 나머지없이 나누일 때 a는 b로 **완제된다**고 말한다.

a가 b로 완제된다는것을 $b\mid a$와 같이 표시한다. 즉

$$a=b\times m+r\,,\quad r=0\Leftrightarrow b\mid a \text{ 또는 } a=b\times m\Leftrightarrow b\mid a$$

［례］ 12는 1, 2, 3, 4, 6, 12로 완제된다.

모든 자연수는 1로 완제되며 옹근수 0은 모든 자연수로 완제된다.

사실 임의의 자연수를 a라고 하면

$$a=a\times1\,,\quad 0=a\times0$$

이므로 완제조건에 맞는다.

[나머지 다루기]

① 합을 어떤 수 a로 나누었을 때의 나머지는 매개 더하는수들을 a로 나누고 그 나머지들의 합을 또 a로 나누었을 때의 나머지와 같다.

［례］ 479＋236을 23으로 나누었을 때 나머지

풀이. $479=23\times20+19$

$236=23\times10+6$

$19+6=25$, $25=23\times1+2$ 나머지 2

② 적을 어떤수 a로 나누었을 때의 나머지는 매 인수들을 각각 a로 나누었을 때 나머지들의 적을 또 a로 나누었을 때의 나머지와 같다.

［례］ 127×379를 5로 나누었을 때 나머지

풀이. $127=5\times25+2$

$379=5\times75+4$

$2\times4=8$, $8=5\times1+3$ 나머지 3

［례］ 17^4을 4로 나누었을 때 나머지

풀이. 17＝4×4＋1

1^4＝1 나머지 1

[약수와 배수]

옹근수 a가 자연수 b로 완제될 때 즉

$$a=b\times m$$

일 때 b를 a의 **약수**, a를 b의 **배수**라고 부른다.

［례］ 12의 약수들의 모임은

{1, 2, 3, 4, 6, 12}

0의 약수는 아무런 자연수나 다 되며 1은 모든 옹근수의 약수로 된다.

– 배수의 성질

① 수 k의 배수들의 합도 수 k의 배수이다. 즉

$a=k\times m$, $b=k\times n$이면

$$a+b=k\times m+k\times n=k\times(m+n)$$

② 인수들가운데서 수 k의 배수가 있으면 적도 수 k의 배수이다.

즉 k의 배수×옹근수: k의 배수

［례］ 24는 8의 배수이고 56도 8의 배수이므로 합

24＋56＝80도 8의 배수이다.

54는 9의 배수이므로 29×54＝1566도 9의 배수이다.

[짝수와 홀수]

2의 배수를 **짝수**, 짝수가 아닌 옹근수를 **홀수**라고 부른다.

– 짝수와 홀수의 성질

① 짝수＋짝수⇒짝수 ② 홀수＋홀수⇒짝수

③ 짝수＋홀수⇒홀수 ④ 짝수×옹근수⇒짝수

⑤ 홀수×짝수⇒짝수 ⑥ 홀수×홀수⇒홀수

상 식

《수론》에 각별한 관심을 둔 수학자 디리흘레
(1805-1859, 도이췰란드)

디리흘레의 부모는 아들을 상인으로 키우려고 하였지만 그는 수학공부에만 몰두하였다.

그때 당시 가우스가 쓴 책 《수론》은 내용이 대단히 풍부한 훌륭한 책이였지만 지나치게 간결하게 그리고 어렵게 썼기때문에 읽기가 대단히 힘들었다. 디리흘레는 《수론》을 곱씹어가면서 읽고 또 읽었다. 이 책은 언제한번 책꽂이에 꽂혀보지 못하였다. 디리흘레는 일생동안 이 책을 가지고 려행을 다녔다. 그리하여 디리흘레는 가우스의 《수론》을 완전히 리해한 첫 사람으로, 그 책의 훌륭한 해설자로 되였다.

그는 《해석적수론》의 시원을 열어놓았다. 그리고 《디리흘레의 원리》(비둘기장원리)의 제창자이기도 하다.

[씨수와 합성수]

1보다 큰 자연수들가운데서 1과 자기자신만을 약수로 가지는 수를 **씨수**라고 부르고 씨수가 아닌 수를 **합성수**라고 부른다.

즉 약수를 2개만 가지는 수를 씨수, 약수를 3개이상 가지는 수를 합성수라고 부른다.

1은 씨수도 합성수도 아니라고 본다.

[례] 2, 11, 13은 씨수이다. 2는 가장 작은 씨수이다.

※ 2와 3, 5와 7, 11과 13, 17과 19처럼 서로 이웃해있는 씨수들을 《**쌍둥이씨수**》라고 부른다.

[씨인수분해]

어떤 수의 씨수인 약수를 그 수의 **씨인수**라고 부른다. 합성수는 다 씨수들의 적으로 고칠수 있다.

수를 씨수들만의 적으로 표시하는것을 **씨인수분해**한다고 말한다.

［례］24, 36, 625의 씨인수분해는 다음과 같다.

$24=2\times12=2\times2\times6=2\times2\times2\times3=2^3\times3$

$36=2\times18=2\times2\times9=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$

$625=5\times125=5\times5\times25=5\times5\times5\times5=5^4$

$2310=2\times3\times5\times7\times11$

씨인수분해는 다음과 같이 하는것이 편리하다.

［례］

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48 \\ 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ & 3 \end{array}$$

$48=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=2^4\cdot3$

서로 다른 씨수들의 제곱의 적으로 표시하는 씨인수분해를 **표준씨인수분해**라고 부른다.

어떤 수의 약수의 개수는 그 수를 씨인수분해한 씨인수들의 제곱지수에 1을 더한 수들의 적과 같다.

［례］수 72의 약수의 개수

$72=3^2\cdot2^3$

$\therefore\ (2+1)(3+1)=12$(개)

[공통약수와 공통배수]

두 옹근수 a, b의 약수들가운데서 공통인 약수들을 a, b의 **공통약수**, a, b의 배수들가운데서 공통인 배수들을 a, b의 **공통배수**라고 부른다.

이 개념은 세개 이상의 수들에 대해서도 그대로 정의된다.

［례］12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18

이므로 12와 18의 공통약수는 1, 2, 3, 6이다.

[5, 3, 9]의 배수

5의 배수: 하나의 자리의 수자가 0이거나 5인 수는 5의 배수이다.

3의 배수: 매 자리의 수자들의 합이 3의 배수인 수는 3의 배수이다.

［례］ 2＋8＋7＋6＋4＝27은 3의 배수이므로 28 764는 3의 배수이다.

9의 배수: 매 자리수들의 합이 9의 배수인 수는 9의 배수이다.

［례］ 7+5+6=18은 9의 배수이므로 756은 9의 배수이다.

[최대공통약수]

공통약수들가운데서 가장 큰 수를 **최대공통약수**라고 부른다.

두 수 a, b의 최대공통약수를 $(a,\ b)$와 같이 표시한다.

［례］ 6의 약수는 1, 2, 3, 6

8의 약수는 1, 2, 4, 8

6과 8의 공통약수는 1, 2 따라서 6과 8의 최대공통약수는 2이다.

최대공통약수는 매 수에 공통으로 들어있는 씨인수들의 적이다.

－ 최대공통약수 구하기

몇개의 수의 최대공통약수를 구하자면 그 수들을 표준씨인수분해하고 공통으로 들어있는 씨인수들을 곱한다. 이때 인수들의 지수는 가장 작은것을 단다.

［례］ (240, 360)을 구하여라.

$240=2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$(240,\ 360)=2^3 \cdot 3 \cdot 5=120$

다음과 같이 하면 편리하다.

2	240	360
2	120	180
2	60	90
5	30	45
3	6	9
	2	3

$$(240,\ 360)=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot3=120$$

※ 두 수 a, b의 최대공통약수가 1일 때 a와 b는 **서로소**라고 부른다.

[례] $(a,\ b)=1$이면 a와 b는 서로소이다.

1과 모든 자연수는 서로소다. 즉 임의의 자연수 a에 대하여 $(a,\ 1)=1$이다.

― **유클리드련제법**

수 42와 30의 최대공통약수를 다음과 같이 구하자.

$$30\overline{)\,42\,}\quad\text{몫 }1,\ \ 42-30=12 \qquad 42=30\times1+12$$

30을 나머지 12로 나눌 때

$$12\overline{)\,30\,}\quad\text{몫 }2,\ \ 30-24=6 \qquad 30=12\times2+6$$

12를 나머지 6으로 나누면

$$6\overline{)\,12\,}\quad\text{몫 }2,\ \ 12-12=0 \qquad 12=6\times2$$

따라서 최대공통약수는 6이다.

우와 같은 계산과정을 **유클리드련제법**이라고 부른다. 간단히 **련제법**이라고 부른다.

두 수 a, b의 최대공통약수는 유클리드런제법으로 얻은 령아닌 마지막나머지와 같다.

[최소공통배수]

공통배수들가운데서 0이 아닌 가장 작은 수를 **최소공통배수**라고 부른다.

두 수 a, b의 최소공통배수를 $[a, b]$와 같이 표시한다.

［례］6과 4의 최소공통배수는 12이다.

— 최소공통배수 구하기

몇개의 수의 최소공통배수를 구하자면 공통으로 들어있는 씨인수들의 적에 공통으로 들어있지 않는 씨인수들을 다 곱한 적을 구하면 된다.

［례］ $120=2^3\times3\times5$, $180=2^2\times3^2\times5$에서 공통으로 들어있는 씨인수들의 적은 $2^2\times3\times5$

공통으로 들어있지 않는 씨인수들의 적은 2×3

이것들을 다 곱한 적은

$$2^2\times3\times5\times2\times3=2^3\times3^2\times5=360$$

［례］25, 60, 90의 최소공통배수를 구하여라.

다음과 같이 하면 편리하다.

$$\begin{array}{c|ccc}
5 & 25 & 60 & 90 \\ \hline
3 & 5 & 12 & 18 \\ \hline
2 & 5 & 4 & 6 \\ \hline
 & 5 & 2 & 3
\end{array}$$

즉 $[25,\ 60,\ 90]=5\times3\times2\times5\times2\times3=900$

— 최대공통약수와 최소공통배수사이의 관계

$$(a,\ b)\cdot[a,\ b]=a\cdot b$$

［례］$(12,\ 18)\cdot[12,\ 18]=12\cdot18$

［례］$(a,\ 215)=43$, $[a,\ 215]=1505$이다. 수 a를 구하여라.

$$a=\frac{43\cdot1505}{215}=301$$

상 식

에라스토테네스의 채질

1부터 1 000까지 자연수를 써놓은 표에서 씨수를 다음과 같이 골라낸다. 먼저 1은 씨수도 합성수도 아니므로 지워버린다. 2는 씨수이므로 남겨놓고 2의 배수들을 다 지워버린다. 남은 수들가운데서 3은 씨수이므로 남겨놓고 3의 배수들은 다 지워버린다.

이런 과정을 계속하면 씨수들을 다 골라낼수 있다.

씨수를 골라내는 이 방법은 B.C. 3세기에 고대그리스의 에라스토테네스라는 사람이 처음으로 발명하였다.

이 방법을 수들을 채로 쳐서 씨수를 골라내는것과 갈다고 하여 **에라스토테네스의 채질**이라고 부르고있다.

3. 분 수

[분수]

전체를 m등분한 한몫인 $\frac{1}{m}$을 하나로 보고 n개 모은 것을 $\frac{n}{m}$으로 쓰고 **분수**라고 부른다. 즉

$$\overbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}^{n}=\frac{n}{m} \quad \text{또는} \quad \frac{n}{m}=\frac{1}{m}\times n=(1\div m)\times n$$

그러므로 a의 $\frac{n}{m}$이란 a를 전체로 보고 m등분한 n몫을 말한다. 즉 a의 $\frac{n}{m}=(a\div m)\times n=a\times\frac{n}{m}$

분수는 또한 분자를 분모로 나눈 **상**과 같다.

$$\frac{n}{m}=n\div m$$

분자가 분모보다 작은(작지 않은)분수를 **참분수**(**가분수**)라고 부르며 옹근수부를 가지고있는 분수를 **데림분수**라고 부른다.

옹근수에서와 마찬가지로 분수에서도 부수를 생각할 수 있다.

[분수의 크기]

옹근수에서와 마찬가지로 분수에서도 $\frac{n}{m}>0$ 이면 **정의 분수**, $\frac{n}{m}<0$ 이면 **부의 분수**라고 부른다.

분자를 분모로 나눈 상이 같은 두 분수는 크기가 같다고 말한다.

분모가 서로 다른 분수는 분모를 같게 하여 비교한다.

분모가 같은 분수에서는 분자가 큰 분수가 크다.

분자가 같은 분수에서는 분모가 작은것이 크다.

[례] $\frac{3}{8}<\frac{5}{8}$, $\frac{7}{19}<\frac{7}{10}$

옹근수에서와 마찬가지로 분수에서도 그 절대값을 생각할수 있다.

[분수의 기본성질]

① 분수의 분자와 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여도 그 분수의 크기는 달라지지 않는다.

$$\frac{n}{m}=\frac{n\times p}{m\times p} \quad (p\neq 0)$$

② 분수의 분자와 분모를 0이 아닌 같은 수로 나누어도 그 분수의 크기는 달라지지 않는다.

$$\frac{n}{m}=\frac{n\div p}{m\div p} \quad (p\neq 0)$$

[분수의 약분]

분수의 분자와 분모를 그의 공통약수로 나누어 더 간단한 수로 고치는것을 **약분**한다고 말한다.

– **분수를 약분하는 방법**

○ 분자와 분모의 공통약수를 찾아 약분하는 방법

○ 분자와 분모의 최대공통약수를 구해서 한번에 약분하는 방법

○ 분자와 분모를 씨인수분해하여 약분하는 방법

[분수의 통분]

분모가 다른 분수들을 크기는 달라지지 않고 분모가 같은 분수로 고치는것을 **통분**한다고 말한다.

통분한 분수들의 분모를 **공통분모**라고 부른다.

공통분모는 보통 분모들의 최소공통배수로 정한다.

[분수의 산법]

– **분수의 더하기와 덜기**

① 분모가 같은 분수끼리 더하거나 덜자면 분모는 그대로 두고 분자끼리 더하거나 던다. 즉

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{a}=\frac{m+n}{a},\quad \frac{m}{a}-\frac{n}{a}=\frac{m-n}{a}$$

② 분모가 서로 다른 분수끼리 더하거나 덜 때는 통분해가지고 분모가 같은 분수의 더하기나 덜기처럼 한다.

특히 분모가 다른 분수들을 련이어 더하거나 덜 때 한번에 통분하여 더하거나 덜어도 된다.

※ 분수의 더하기에서도 옹근수의 더하기에서 성립하는 바꿈법칙, 묶음법칙이 그대로 성립한다.

– **분수의 곱하기**

두 분수를 곱하려면 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱하면 된다. 즉

$$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}=\frac{n\times q}{m\times p},\quad \frac{n}{m}\times q=\frac{n}{m}\times\frac{q}{1}=\frac{n\times q}{m}$$

이때 적은 같은 부호를 가진 두 분수를 곱하면 정의 분수, 서로 다른 부호를 가진 두 분수를 곱하면 부의 분수로 된다.

곱하기를 할 때 데림분수는 가분수로 고쳐서 한다.

※ 분수의 곱하기에서도 옹근수의 곱하기에서 성립하는 바꿈법칙, 묶음법칙, 분배법칙이 성립한다.

[거꿀수]

곱하여 1이 되는 두 수를 서로 다른것의 **거꿀수**라고 부른다.

$$\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$$

$\frac{b}{a}$는 $\frac{a}{b}$의 거꿀수, $\frac{a}{b}$는 $\frac{b}{a}$의 거꿀수

- 분수의 나누기

어떤 수를 분수로 나누려면 분수의 거꿀수를 곱하면 된다.

$$a \div \frac{p}{q} = a \times \frac{q}{p}, \quad \frac{n}{m} \div \frac{q}{p} = \frac{n}{m} \times \frac{p}{q}$$

나누기를 할 때 데림분수는 가분수로 고쳐서 한다.

○ 분수의 나누기의 성질

① $\left(\frac{b}{a} \pm \frac{n}{m}\right) \div \frac{q}{p} = \left(\frac{b}{a} \div \frac{q}{p}\right) \pm \left(\frac{n}{m} \div \frac{q}{p}\right)$

② $\left(\frac{b}{a} \times \frac{n}{m}\right) \div \frac{q}{p} = \left(\frac{b}{a} \div \frac{q}{p}\right) \times \frac{n}{m}$

③ $\frac{b}{a} \div \left(\frac{n}{m} \times \frac{q}{p}\right) = \left(\frac{b}{a} \div \frac{n}{m}\right) \div \frac{q}{p}$

④ $\frac{b}{a} \div \frac{n}{m} = \left(\frac{b}{a} \times \frac{q}{p}\right) \div \left(\frac{n}{m} \times \frac{q}{p}\right)$

$\frac{b}{a} \div \frac{n}{m} = \left(\frac{b}{a} \div \frac{q}{p}\right) \div \left(\frac{n}{m} \div \frac{q}{p}\right)$

상 식

분수의 발생

분수는 자연수보다 퍽 후에야 나왔다.

먼 옛날 사람들은 물체의 길이나 땅의 면적, 그릇의 용적 등을 자연수만 가지고 표시하였으며 단위보다 작은 나머지량을 버렸다. 그러나 사회가 발전하고 단위보다 작은 량을 다루어야 할 필요가 많이 제기됨에 따라 점차 단위량들을 몇개로 같게 나눈 한몫을 새로운 작은 단위로 잡아 쓰기 시작하였다. 이렇게 되여 분수가 발생되였다.

지금 우리가 쓰고있는 모양의 분수표시방법은 12~13세기경에 나왔으나 16세기에 이르러서야 널리 사용되기 시작하였다.

4. 소 수

[소수]

분모가 10의 제곱으로 되여있는 분수를 분모없이 표시한것을 **소수**라고 부른다.

[례] $\frac{32736}{10^3}=32.736$

[유한소수와 무한소수]

분수를 소수로 고치자면 부호는 그대로 달고 분자를 분모로 나눈 상을 써주면 된다.

0.75, 3.4 등과 같이 소수부가 몇자리로 끝나는 소수를 **유한소수**, 0.333…, 1.0832… 등과 같이 소수부가 끝없이 계속되는 소수를 **무한소수**라고 부른다.

○ 분모의 씨인수가 2나 5만으로 된 분수는 분모를 10의 제곱으로 고칠수 있으므로 그런 분수는 유한소수로 고쳐진다.

다 약분된 분수의 분모에 2나 5가 아닌 씨수가 있으면 그 분수는 무한소수로 고쳐진다.

○ 무한소수가운데서 0.121 2…, −0.166 6… 등과 같이 소수점아래에서 어떤 수자렬이 끝없이 되풀이되는 소수를 **순환무한소수**라고 부른다.

이때 되풀이되는 수자렬을 **순환절**이라고 부르고 팔호안에 넣어서 표시한다.

[례] $\frac{4}{33}=0.1212\cdots=0.(12)$

$-\frac{1}{6}=-0.1666\cdots=-0.1(6)$

0.(12)와 같이 소수부가 순환절로만 되여있는 순환무한소수를 **순순환무한소수,** 0.8(3)과 같이 소수부의 앞부분에 순환되지 않는 수자가 섞인 순환무한소수를 **혼순환무한소수**라고 부른다.

모든 분수는 다 소수로 고칠수 있다.

소수부에서 어떤 수자렬이 순환되지 않는 무한소수를 **비순환무한소수**라고 부른다.

[례] 3.141592…

– **소수를 분수로 고치기**

○ 유한소수는 다 분수로 고칠수 있다. 유한소수를 분수로 고치려면 분자는 소수점을 떼여버려서 얻는 옹근수로 하고 분모는 소수점아래에 있는 수자의 개수를 지수로 하는 10의 제곱으로 하면 된다.

[례] $3.\underline{178}=\frac{3178}{1000}=\frac{3178}{10^3}$

(3)

○ 순환무한소수는 다음 규칙에 따라 분수로 고친다.

· 순순환무한소수를 분수로 고치기

순순환무한소수를 분수로 고치자면 부호는 그대로 두고 분모에는 순환절에 든 수자의 개수만큼 수자 9를 써주고 분자에는 순환절의 수를 그대로 써주면 된다.

즉 $0.(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=\dfrac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n}}$

· 혼순환무한소수를 분수로 고치기

혼순환무한소수를 분수로 고치자면 부호는 그대로 두고 분모에는 순환절에 든 수자의 개수만큼 9를 써주고 순환되지 않는 소수부의 개수만큼 0을 붙여준다.

그리고 분자에는 순환절까지의 소수부에서 순환되지 않는 소수부를 던차를 써주면 된다. 즉

$$0.\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n)=$$
$$=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n-\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m}{\underbrace{99\cdots9}_{n}\underbrace{00\cdots0}_{m}}$$

비순환무한소수는 분수로 표시되지 않는다.

- 소수
  - 유한소수
  - 무한소수
    - 순환무한소수
      - 순순환무한소수
      - 혼순환무한소수
    - 비순환무한소수

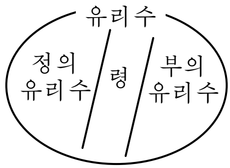
5. 유리수

[유리수]

분수로 표시할수 있는 수를 **유리수**라고 부른다.

옹근수는 분모가 1인 분수로 볼수 있으므로 옹근수도 유리수이다.

유리수가운데서 정수를 **정의 유리수**, 부수를 **부의 유리수**라고 부른다. 유한소수나 순환무한소수로 표시되는 수도 유리수이다.



유리수전체의 모임을 Q로 표시한다.

[지수형식]

10의 제곱을 써서 수를 표시한것을 그 수의 **지수형식**이라고 부른다.

$$\underbrace{308}_{\text{결수}}\times 10^m$$

[분수와 소수가 섞인 식의 계산]

분수와 소수가 섞인 식에서는 분수를 소수로 고치든가 소수를 분수로 고쳐서 계산한다.

더하기와 덜기에서는 대체로 분수를 소수로 고쳐서 계산하는것이 좋고 곱하기와 나누기에서는 소수를 분수로 고쳐서 계산하는것이 좋다.

순환무한소수가 들어있는 식에서는 소수를 분수로 고쳐 계산하는것이 좋다.

[례] $0.(3)\div\frac{10}{3}+\frac{5}{2}=\frac{3}{9}\times\frac{3}{10}+\frac{5}{2}=\frac{1}{10}+\frac{5}{2}=0.1+2.5=2.6$

— **유리수모임의 성질**

① **유리수모임의 순서성:** 아무런 유리수 a, b를 취해도 a, b 사이에는 다음의 세 관계가운데 한 관계만이 성립한다.

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

그리고 $a<b$, $b<c$이면 $a<c$ (이동성)이 성립한다.

② **유리수모임의 조밀성:** $a<b$인 임의의 두 유리수 a, b 사이에는 $a<r<b$를 만족시키는 적어도 하나의 유리수 r가 있다. 사실 $r=\frac{a+b}{2}$를 취하면 된다.

결국 임의의 두 유리수사이에는 무수히 많은 유리수가 있다는것이다.

③ **유리수모임의 닫김성:** 유리수모임 Q에 들어있는 임의의 두 수(한 수를 두번 취해도 좋다.)에 어떤 산법을 실시한 결과가 모임 Q에 들면 Q는 그 산법에 관해서 닫

긴다고 말한다. 유리수모임은 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기에 대하여 닫긴다. 이때 0으로의 나누기는 제외한다.

[퍼센트]

어떤 량의 $\frac{1}{100}$을 그 량의 **1퍼센트**라고 부르고 1%로 표시한다.

$$\left.\begin{array}{l} 1\%=\frac{1}{100} \\ 2\%=\frac{2}{100} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 100\%=\frac{100}{100}=1(\text{전체}) \end{array}\right\} n\%=\frac{n}{100}$$

%
퍼센트

[례] $20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0.2$

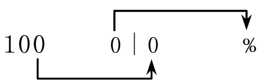
$120\%=\frac{120}{100}=\frac{6}{5}=1.2$

상식

퍼센트와 그 기호의 유래

퍼센트라는 말은 라틴어 《Procetum》에서 나온것인데 그 본래의 뜻은 백에 대하여 몇인가 하는것이다.
례를 들어 7퍼센트라는것은 전체를 100으로 볼 때 7 즉 전체의 $\frac{7}{100}$을 의미한다. 이로부터 퍼센트를 **백분률**이라고도 부른다.

퍼센트기호 《%》는 수 100의 모양을



와 같이 변경시켜 만든것으로 알려지고있다.

— 한 수의 몇%를 구하기

$$\left.\begin{array}{l}\text{전체；}\ 100\%\cdots\cdots a\\ \text{부분；}\ \ p\%\cdots\cdots\cdots x\end{array}\right\} x=\frac{a}{100}\times p \quad (\text{또는}\quad x=a\times\frac{p}{100})$$

［례］ 동이 20% 들어있는 합금 300kg에는 동이 얼마나 들어있겠는가?

풀이. 300의 20%$=300\times\frac{20}{100}=60$ 답. 60kg

— 어떤 수와 그 수의 %를 알고 전체를 구하기

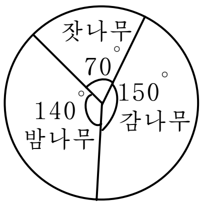
$$\left.\begin{array}{l}\text{전체；}\ 100\%\cdots\cdots x\\ \text{부분；}\ \ p\%\cdots\cdots\cdots b\end{array}\right\} x\times\frac{p}{100}=b \text{ 이므로}\quad x=\frac{b}{p}\times 100$$

— 한 수가 다른 수의 몇%인가를 구하기

$$\left.\begin{array}{l}\text{전체；}\ a\cdots\cdots 100\%\\ \text{부분；}\ b\cdots\cdots x\%\end{array}\right\} x=\frac{b}{a}\times 100(\%)$$

[원도표]

원에 그린 도표를 **원도표**라고 부른다.



6. 실수와 복소수

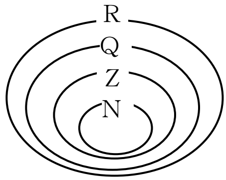
[무리수]

비순환무한소수로 표시되는 수를 **무리수**라고 부른다.

무리수도 유리수와 마찬가지로 끝없이 많으며 정의 무리수, 부의 무리수로 가른다.

［례］ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sin 10^{\circ}$, $\lg 3$, $2^{\sqrt{2}}$ 등은 다 무리수이다.

[실수]



유리수와 무리수를 통털어 **실수**라고 부른다. 실수모임을 R로 표시한다.

옹근수모임을 Z, 자연수모임을 N, 유리수모임을 Q라고 하면

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

― **실수모임의 성질**

① **실수모임의 순서성:** 임의의 두 실수 a, b를 취해도 다음의 세 관계가운데서 한 관계만이 성립한다.

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

그리고 $a<b$, $b<c$이면 $a<c$ (이동성)이 성립한다.

② **실수모임의 조밀성:** $a<b$인 임의의 두 실수 a, b를 잡아도 $a<r<b$인 실수 r가 적어도 하나 있다.

이리하여 두 실수사이에는 무수히 많은 실수가 있다는것이 나온다.

③ **실수모임의 련속성:** 실수들을 수축의 점으로 표시하면 수축은 실수가 표시하는 점들로 꽉 차있다. 이리하여 수축의 점은 실수들이 련속적으로 배렬된것처럼 볼수 있기에 이런 성질을 실수모임의 **련속성**이라고 말한다.

④ **실수모임의 닫김성:** 실수모임은 두 수의 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기(0으로의 나누기는 제외)에 관하여 닫긴다. 이것을 실수모임은 사칙산법에 관하여 닫긴다고 말한다. 그러나 무리수모임은 어느 한 산법에 관해서도 닫기지 않는다. 즉 두 무리수의 합, 차, 적, 상이 유리수로 되는 경우가 있는것이다.

[례] $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}+2)=2\in Q$, $(3+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=1\in Q$

$$2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=6\times 5=30\in Q$$

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=2\in Q$$

[허수의 단위]

2제곱하면 －1로 되는 새로운 수 i를 받아들여 그것을 **허수의 단위**라고 부른다.

즉 $i^2=-1$

그리고 실수에서 하던 산법대로 하면

$$i^0=1$$

$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$

$$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

일반적으로

$$i^n=\begin{cases}1 & n=4k\\ i & n=4k+1\\ -1 & n=4k+2\\ -i & n=4k+3\end{cases}\quad (k=0\ ,\ \pm1\ ,\ \pm2,\ \cdots)$$

실수의 테두리에서는 부수의 2차뿌리는 없다고 하였다. 그러나 새로운 수 i를 써서 －9의 2차뿌리는 $\sqrt{-9}=3i$, $-\sqrt{-9}=-3i$와 같이 표시하기로 한다. 그러면 －1의 2차뿌리는

$$\sqrt{-1}=i\ ,\quad -\sqrt{-1}=-i$$

일반적으로 a가 정수일 때 부수 $-a$의 2차뿌리는 서로 반대인 두 수 $a^{\frac{1}{2}}i$와 $-a^{\frac{1}{2}}i$이다. 즉

$$(-a)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}i \quad \text{또는} \quad \sqrt{-a}=\sqrt{a}i$$

$$-(-a)^{\frac{1}{2}}=-a^{\frac{1}{2}}i \quad \text{또는} \quad -\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i$$

[복소수]

a, b가 실수일 때 $\alpha=a+bi$ 모양의 수를 **복소수**라고 부른다. 여기서 a, b를 각각 α의 **실수부**, **허수부**라고 부른다. 그리고 실수부를 $a=\mathrm{Re}\alpha$, 허수부를 $b=\mathrm{Im}\alpha$와 같이 표시한다.

$b=0$ 인 복소수 $a+0i$ 는 실수 a 와 같다고 본다.

$b\neq 0$ 인 복소수 $a+bi$ 는 실수가 아니다. 이러한 복소수를 **허수**라고 부른다. 특히 $a=0$ 이고 $b\neq 0$ 인 복소수 $0+bi$ 를 **순허수**라고 부른다.

$$\underset{(a+bi)}{\text{복소수}}\begin{cases}\text{실수} \quad (b=0) \\ \text{허수} \quad (b\neq 0)\begin{cases}\text{순허수} & (a=0) \\ \text{그밖의 허수} & (a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

복소수모임을 글자 C로 표시한다. 그러면

$$\mathrm{N}\subset\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}\subset\mathrm{C}$$

두 복소수에서 실수부와 허수부가 각각 같으면 그 **두 복소수는 같다**고 말하고 같기기호 <=>로 표시한다.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$$

그러므로 실수부와 허수부가운데서 어느 하나라도 같지 않으면 두 복소수는 같지 않다.

복소수는 서로 다른 글자 α, β, γ, … 등으로 표시하여 구별한다.

복소수모임에서는 실수에서와 같은 크기관계를 생각하지 않는다. 그러나 $a\neq c$ 또는 $b\neq d$ 이면 $a+bi\neq c+di$ 이다.

[실수곁수 2차방정식의 풀이]

판별식	풀이의 개수	풀이모임
$\mathrm{D}>0$	서로 다른 실수풀이	$\left\{-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a},\ -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}\right\}$
$\mathrm{D}=0$	한개의 실수풀이(겹풀이)	$\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$\mathrm{D}<0$	서로 다른 두개의 허수풀이	$\left\{-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\lvert\mathrm{D}\rvert}}{2a}i,\ -\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\lvert\mathrm{D}\rvert}}{2a}i\right\}$
$(\mathrm{D}=b^2-4ac)$		

[공액복소수]

복소수 $\alpha=a+bi$ 에서 허수부의 부호를 반대로 바꾼 복소수 $a-bi$ 를 α 의 **공액복소수**라고 부르고 $\overline{\alpha}$ 로 표시한다.

$$\overline{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$$

이때 $\overline{a-bi}=\overline{a+(-b)i}=a-(-b)i=a+bi$ 이므로 α 와 $\overline{\alpha}$ 는 서로 공액인 복소수이다.

실수의 공액인 복소수는 그 실수자신이다.

［례］ $3+2i$ 에 공액인 복소수는 $3-2i$

32, $-3i+2$ 에 공액인 복소수는 각각 32, $2+3i$

[복소수의 산법]

— 복소수의 더하기와 덜기

두 복소수의 더하기와 덜기는 실수에서와 같이 하되 다음 규칙에 따라 즉 실수부는 실수부끼리, 허수부는 허수부끼리 묶어서 진행한다.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

［례］ $(2+3i)+(-6+2i)=(2-6)+(3+2)i=-4+5i$

$(2+3i)-(-6+2i)=(2+6)+(3-2)i=8+i$

복소수 $a+bi$ 는 두 복소수 $a+0i$ 와 $0+bi$ 의 합으로 볼수 있다.

복소수의 더하기에서도 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다.

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (바꿈법칙)

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (묶음법칙)

$\alpha=a+bi$ 일 때

$$0-\alpha=(0+0i)-(a+bi)=-a-bi$$

를 간단히 $-\alpha$ 로 표시하면

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$$

이라는것을 곧 알수 있다.

복소수 $-\alpha$를 복소수 α의 **반대수**라고 부른다.

복소수를 덜 때에는 그 반대수를 더하면 된다. 즉

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

— 복소수의 곱하기와 나누기

복소수의 곱하기와 나누기에서는 $i^2=-1$로 바꾸면서 실수의 곱하기, 나누기에서처럼 한다.

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

［례］ $(2+3i)\,(-6+2i)=2\cdot(-6)+2\cdot 2i+3\cdot(-6)i+3\cdot 2i^2=$

$$=[2\cdot(-6)-3\cdot 2]+[2\cdot 2+3\cdot(-6)]i=-18-14i$$

$$\frac{2+3i}{-6+2i}=\frac{(2+3i)\,(-6-2i)}{(-6+2i)\,(-6-2i)}$$

$$=\frac{[2\cdot(-6)+3\cdot 2]+[2\cdot(-2)+3(-6)]i}{(-6)^2+2^2}=\frac{-6-22i}{40}=$$

$$=-\frac{6}{40}-\frac{22}{40}i=-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}i$$

복소수의 곱하기에서도 실수모임에서와 같이 바꿈법칙, 묶음법칙, 분배법칙이 성립한다.

$\alpha\beta=\beta\alpha$ (바꿈법칙)

$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (묶음법칙)

$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ (분배법칙)

$\alpha=a+bi(\neq 0)$일 때 복소수 $\dfrac{1}{\alpha}$을 복소수 α의 **거꿀수**라고 부른다.

$$\alpha\cdot\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

이므로 복소수 α의 거꿀수는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\cdot\overline{\alpha}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

［례］ $3+2i$의 거꿀수

$$\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

복소수를 나눌 때에는 그 거꿀수를 곱하면 된다. 즉

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\ (\beta\neq 0)$$

복소수에서도 0으로의 나누기는 할수 없다.

[복소수모임의 닫김성]

복소수모임은 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기, n차뿌리구하기 산법에 관하여 닫긴다. 그러나 허수들의 모임은 우의 산법에 관하여 닫기지 않는다.

［례］ $(2+3i)+(2-3i)=4$, $(3-2i)-(5-2i)=-2$

$3i\cdot 5i=-15$, $\frac{5i}{2i}=\frac{5}{2}$

[대수적수와 초월수]

유리수곁수대수방정식의 풀이로 되는 수를 **대수적수**라고 부르고 그렇지 않은 수를 **초월수**라고 부른다.

［례］ 모든 옹근수, 유리수는 대수적수이다.

원둘레률 π, $\log_2 3$, $\sin 10^\circ$, $2^{\sqrt{2}}$은 다 초월수이다.

[복소수의 기하학적표시]

복소수 $a+bi$가 주어지면 실수쌍 (a, b)가 주어지고 이때 평면의 점 $\mathrm{M}(a, b)$가 정해진다.

거꾸로 평면의 점 $\mathrm{M}(a, b)$가 주어지면 실수쌍 (a, b)에 대하여 하나의 복소수 $a+bi$를 생각할수 있다. 즉

$$(a+bi)\xleftrightarrow{1\text{대}1}\mathrm{M}(a, b)$$

따라서 복소수 $a+bi$는 기하학적으로 자리표평면의 점으로 표시할수 있다.

7. 근사계산

[오차와 절대오차]

정확한 값 A와 그의 근사값 a에 대하여 $A-a$를 근사값 a의 **오차**, $|A-a|$를 근사값 a의 **절대오차**라고 부른다. 절대오차를 Δ_a로 표시한다. 즉 $\Delta_a=|A-a|$

절대오차가 기껏해서 Δa를 넘지 않을 때 즉

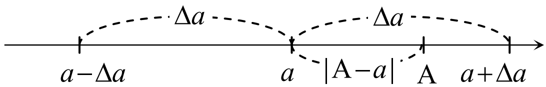
$$\Delta_a=|A-a|\le\Delta a$$

일 때 Δa를 근사값 a의 **절대오차한계**라고 부른다.

이때

$$a-\Delta a\le A\le a+\Delta a$$

가 성립한다는것을 알수 있다.



A의 근사값 a의 절대오차한계가 Δa라는것을 $A=a\pm\Delta a$로 표시한다.

[상대오차]

$\frac{\Delta_a}{|A|}$ 또는 $\frac{\Delta_a}{|a|}$를 근사값 a의 **상대오차**라고 부르고 δ_a로 표시한다. 즉

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|A|} \quad \text{또는} \quad \delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}$$

여기서 Δ_a를 Δa로 바꾸면 **상대오차한계** δa를 얻는다. 즉

$$\delta a=\frac{\Delta a}{|A|} \quad \text{또는} \quad \delta a=\frac{\Delta a}{|a|}$$

상대오차는 보통 %로 표시한다.

［례］ $A=50,\ a=52$일 때 $\Delta_a=|50-52|=2$

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|A|}=\frac{2}{50}=0.04=4\ (\%)$$

［례］ L＝84±0.42에서

$$\delta\ell=\frac{0.42}{84}\times100=0.5(\%)$$

$84-0.42\le L\le 84+0.42$,　$83.58\le L\le 84.42$

[믿을수자]

근사값에서 어떤 수자 α가 놓인 자리의 단위의 절반이 그 절대오차보다 작지 않을 때 α를 **믿을수자**라고 부른다.

1보다 작은 정수에서는 소수점아래의 0이 아닌 첫 수자앞에 있는 0은 믿을수자로 보지 않기로 한다.

［례］ $a=7250$, $\Delta_a=7$일 때 a에서 수자 0이 놓인 자리는 하나의 자리이고 그 절반은 $\frac{1}{2}=0.5$이며 $0.5<7$이므로 0은 믿을수자가 아니다. 마찬가지로 수자 5도 믿을수자가 아니다.

그러나 백의 자리의 수자 2은 $\frac{100}{2}=50$, $50>7$ 이므로 믿을수자이다.

천의 자리의 수자 7은 물론 믿을수자이다.

[근사값들의 더하기와 덜기]

두개의 근사값들의 합이나 차를 계산할 때에는 보통 주어진 근사값들가운데서 마지막 믿을수자의 자리가 가장 높은것을 찾고 다른 근사값들은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨서 계산한다. 나온 계산결과에서는 마지막자리를 반올림한다.

［례］ $84.092+5.6\approx89.7$　　$165.846-92.4\approx73.5$

$$\begin{array}{r} 84.09 \\ +\ \ 5.6 \\ \hline 89.69 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 165.85 \\ -\ \ 92.4 \\ \hline 73.45 \end{array}$$

[근사값들의 곱하기와 나누기]

두개의 근사값들의 적이나 상을 계산할 때에는 보통 주어진 수들가운데서 믿을수자의 개수가 가장 작은것을 찾고 다른것들은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨가지고 계산한 다음 결과의 믿을수자의 개수는 처음 찾은것과 같게 한다.

［례］ $0.45326\times3.7\approx1.7$

$$\begin{array}{r} 0.453 \\ \times\quad 3.7 \\ \hline 3171 \\ 1359 \\ \hline 1.6761 \end{array}$$

[지수가 부수인 제곱]

지수가 0 또는 부의 옹근수인 10의 제곱은 다음과 같이 약속한다.

$$10^0=1$$
$$10^{-n}=\frac{1}{10^n}\ (n\in \mathrm{N})$$

[유효수자]

10진수의 수자렬에서 10의 제곱을 곱하거나 나누어도 달라지지 않는 토막에 들어있는 모든 수자들을 그 수의 **유효수자**라고 부른다.

［례］ 3 260의 유효수자는 3, 2, 6이고

0.000 307의 유효수자는 3, 0, 7이다.

[수의 표준지수형식]

정수를 구간 [1, 10)에 드는 수에 10의 제곱을 곱한 적으로 표시한것을 **수의 표준지수형식**이라고 부른다.

$$\mathrm{A}=\underset{\text{표준결수}}{\underset{\downarrow}{a}}\cdot 10^{\overset{\downarrow}{n}}\ (1\le a<10,\ n\in \mathrm{Z})$$

(↓ a: 표준결수, ↓ n: 표준지수)

8. 복소수의 삼각형식

[복소수평면]

자리표평면의 점을 복소수로 볼 때 이 평면을 **복소수평면**(가우스평면)이라고 부른다.

복소수평면에서 실수는 x축의 점으로, 순허수는 y축의 점으로 표시된다. 그러므로 x축을 **실축**, y축을 **허축**, 점 O를 **원점**이라고 부른다.

앞으로 복소수 α라는 말과 점 α라는 말은 같은것으로 보기로 한다.

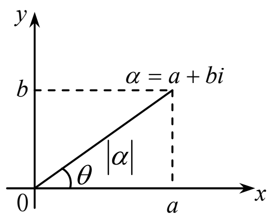
복소수 $\alpha=a+bi$는 또한 자리표평면에서 이 복소수를 표시하는 점 α를 끝점, 원점 O를 첫점으로 하는 벡토르와 1대1로 대응시킬수 있다.

복소수 $\alpha=a+bi$에 대응하는 벡토르를 복소수 α의 **동경벡토르**라고 부른다. 동경벡토르의 길이는 피다고라스의 정리에 의하여 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.

[복소수의 절대값]

복소수 $\alpha=a+bi$에 대하여 수 $\sqrt{a^2+b^2}$을 복소수 α의 **절대값**이라고 부르고 $|\alpha|$와 같이 표시한다. 즉

$$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$



[편각]

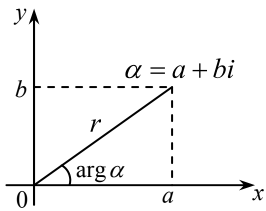
령아닌 복소수 $\alpha=a+bi$의 동경벡토르가 x축의 정방향과 이루는 각 θ를 복소수 α의 **편각**이라고 부르고 $\arg\alpha=\arg(a+bi)=\theta$와 같이 표시한다.

복소수 0=0+0i에 대해서는 아무런 각이나 다 편각으로 본다. 그러므로 arg0은 일정하게 정해지지 않는다.

복소수 $\alpha=0$은 절대값만으로 정해진다.

[복소수의 삼각형식]

복소수 $\alpha = a + bi$ 의 절대값을 r , 편각을 θ 라고 하자.



그러면 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

따라서 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 로 쓸 수 있다.

이것을 복소수 α 의 **삼각형식** 또는 **극형식**이라고 부른다.

그리고 $a + bi$ 를 α 의 **대수형식**이라고 부른다.

대수형식의 복소수를 삼각형식으로 고치려면

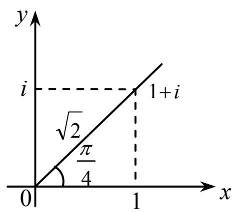
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\quad \cos\theta = \frac{a}{r},\quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

에 의하여 절대값 r 와 편각 θ 를 정하면 된다.

[례] 복소수 $1+i$ 의 삼각형식

풀이. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 이므로



$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

[례] i 의 삼각형식

풀이. $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

— **삼각형식으로 표시된 복소수의 산법**

$$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ ,\quad \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

삼각형식의 복소수를 곱할 때에는 절대값들은 곱해지고 편각들은 더해진다.

$$\alpha\beta = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

삼각형식의 복소수를 나눌 때에는 절대값들은 나누어지고 편각들은 덜어진다.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

［례］ $6(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\times\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ) =$

$$=\frac{6}{2}[\cos(45^\circ+15^\circ)+i\sin(45^\circ+15^\circ)]=3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$\frac{0.8\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)}{4(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$

$$=\frac{0.8}{4}\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi-\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\pi\right)\right]=0.2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

복소수의 절대값과 편각은 다음과 같은 성질을 가진다.

① $|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$, $\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta$

② $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta$

성질 ①은 인수가 3개이상인 경우에도 그대로 성립한다. 즉 $|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\cdots\cdot|\alpha_n|$

$$\arg(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + \cdots + \arg\alpha_n$$

특히 $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, $\arg(\alpha^n) = n\arg\alpha$

이로부터 복소수의 n제곱공식을 얻는다. ($n\in$N)

$$\alpha^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

이 공식을 **뫄브르의 공식**이라고 부른다.

$z^n=\alpha$ 인 z를 복소수 α의 n**차뿌리**라고 부르고 $z=\sqrt[n]{\alpha}$ 와 같이 표시한다.

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 일 때 편각에 2π의 옹근수배를 더하여도 복소수는 달라지지 않으므로 다음 공식이 나온다.

$$\sqrt[n]{\alpha}=\left\{z_k \middle| z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-1\right\}$$

여기서 $\sqrt[n]{r}$ 는 정수 r의 $\frac{1}{n}$제곱이다.

복소수 α의 n차뿌리 $\sqrt[n]{\alpha}$ 는 실수의 경우와는 달리 n개의 n차뿌리전부를 표시한다.

［례］ 복소수 $1+i$의 4차뿌리를 구하여라.

풀이. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore\ \sqrt[4]{1+i}=\left\{\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}$$

$$=\left\{\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}$$

이제 $\omega=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}(=i)$ 로 표시하면

$$\omega^k=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\ (=i^k)$$

$1+i$의 4차뿌리를 $z_k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 로 표시하면

$$z_k=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\omega^k$$

이 4개의 값을 각각 표시하면

$$z_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$z_1 = z_0\omega^1 = z_0 i$$

$$z_2 = z_0\omega^2 = z_0 i^2 = -z_0$$

$$z_3 = z_0\omega^3 = z_0 i^3 = -z_0 i$$

복소수 $\alpha(\neq 0)$ 의 n 차뿌리를 구할 때 그의 한 n 차뿌리 β 를 알면 다음 공식에 의하여 나머지 n 차뿌리들을 구할수 있다.

$$\sqrt[n]{\alpha} = \left\{ z_k \middle| z_k = \beta\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \right\}$$

［례］ 복소수 $64(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$ 의 3차뿌리를 구하여라.

풀이. 이 복소수의 3차뿌리를 하나 구하면

$$\sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{135^\circ}{3} + i\sin\frac{135^\circ}{3}\right) = 4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$\therefore \quad z_k = 4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\omega^k, \quad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

$$\omega = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

즉 3차뿌리는

$$\{4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),\ 4(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ),\ 4(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)\}$$

－ **복소수 $a + bi(b \neq 0)$ 의 2차뿌리를 구하는 공식**

$$\sqrt{a+bi} = x + yi \ (x,\ \ y : \text{실수})$$

로 놓고 두 변을 2제곱한 다음 두 복소수가 같기 위한 조건을 리용하여

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

를 풀어서 x, y 를 구하면 다음과 같은 공식을 얻는다.

$b>0$ 인 경우

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

$b<0$ 인 경우

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

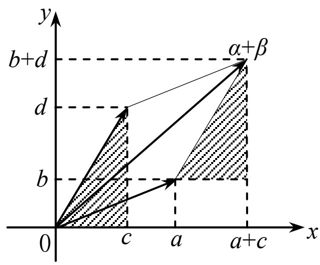
［례］ $\sqrt{i}=\sqrt{0+i\cdot 1}$ 이므로 $a=0$， $b=1$

$$\therefore\ \sqrt{i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{1}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{1}}{2}}\right]=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

[복소수산법의 기하학적의미]

— 더하기와 덜기

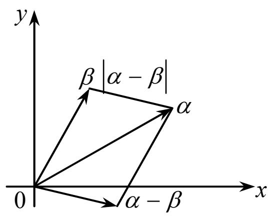
$\alpha=a+bi$， $\beta=c+di$



두 복소수 α 와 β 의 합 $\alpha+\beta$ 는 복소수 α 의 동경벡토르와 β 의 동경벡토르를 이웃한 두 변으로 하는 평행4변형의 대각선의 끝점으로 표시된다.

다음 안같기식이 성립하는것도 곧 알수 있다.

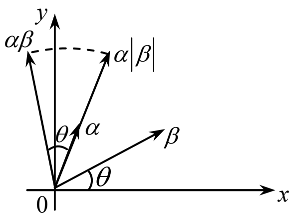
$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$$



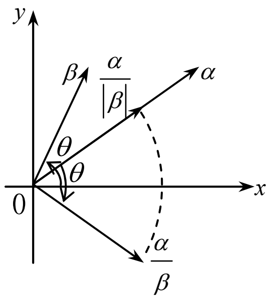
복소수 α 에 복소수 β 를 더한다는것은 α 를 표시하는 점이 β 의 동경벡토르의 방향으로 그 길이만큼 평행이동한다는것을 의미한다.

덜기는 더하기의 거꿀산법이므로 $\alpha-\beta=r$ 라고 하면 $\beta+\gamma=\alpha$ 이므로 복소수 β 의 동경벡토르를 한 변으로 하고 복소수 α 의 동경벡토르를 대각선으로 하는 평행4변형의 이웃변의 끌점이 바로 차 $\alpha-\beta$ 를 표시한다.

— **곱하기와 나누기**



ㄱ)



ㄴ)

두 복소수 α 와 β 의 적 $\alpha\beta$ ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$)는 복소수 α 의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$ 배하고 $\arg\beta$ 만큼 회전시킨 벡토르의 끌점으로 표시한다.

복소수 α 에 복소수 β 를 곱한다는것은 α 의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$ 배하고 원점을 중심으로 $\arg\beta$ 만큼 정방향으로 회전한다는것을 의미한다. (그림 ㄱ))

두 복소수 α 와 β 의 상 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$)는 복소수 α 의 동경벡토르의 크기를 $\dfrac{1}{|\beta|}$ 배하고 $\arg\beta$ 만큼 부의 방향으로 회전시킨 벡토르의 끌점으로 표시된다. (그림 ㄴ))

0아닌 실수는 모두 정수, 부수의 부호를 가지며 실수들은 수축에 빈틈없이 늘여놓을수 있다. 또 실수들은 서로 크고작은 관계를 비교할수 있다.

그러나 복소수는 복소수평면에 펴놓이게 되기때문에 정수, 부수의 부호를 가지게 하거나 크고작은 비교를 하기 어렵다. 때문에 허수에 대해서는 정수, 부수의 부호를 말하지 않으며 허수와 실수, 허수와 허수사이에는 크고작은 비교를 하지 않는다.

따라서 정수, 부수라고 하면 그것은 실수이며 안갈기식이 써있으면 그 두 변의 값은 실수이다.

상 식

많은 론문을 남긴 수학자 꼬쉬
(1789-1857, 프랑스)

꼬쉬는 해석학에서 많은 업적을 남기였다.

꼬쉬의 수렴판정법도 그가 내놓았다. 그의 최대의 공적은 복소수함수론을 개척한것이다.

꼬쉬의 적분공식발견도 유명한것이다.

꼬쉬는 행렬식리론의 기본틀거리를 마련하였다.

꼬쉬는 800여건의 론문을 남기였는데 가우스와 함께 근대수학을 완성단계에 올려세우는데 크게 공헌하였다.

제2장. 셈 식

1. 여러마디식

[한마디식]

곱하기만 들어있는 식을 **한마디식**이라고 부른다.

수 하나, 글자 하나도 한마디식이다.

수와 글자들의 적에서 수인수를 **결수**라고 부른다.

［례］ $\underline{3}a^2$, $\underline{-\frac{2}{5}}xy$

결수

※ $x=1\cdot x$, $-x=-1\cdot x$ 이므로 x 와 $-x$ 의 결수를 각각 1, －1 로 본다.

식에 들어있는 글자에는 변하는 값(여러개의 수)을 대신하는 글자도 있고 일정한 값을 대신한것도 있다.

일반적으로 일정한 값을 대신하는 글자를 a, b, c, … 로, 변하는 값을 대신하는 글자를 x, y, z, …로 표시한다.

일정한 수를 대신하는 글자를 수와 같이 보고 결수에 넣어 쓴다.

［례］ $\underset{\text{결수}}{\underline{6a}}\,x^2$

[한마디식의 차수]

한마디식에 들어있는 변하는 값을 대신하는 글자인수의 제곱지수들의 합을 그 **한마디식의 차수**라고 부른다.

［례］ $3xy$ 의 차수 2

[여러마디식]

한마디식을 더하기기호나 덜기기호로 이어서 만든 셈식을 **여러마디식**이라고 부른다.

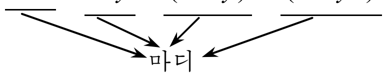
한마디식도 여러마디식으로 본다.

[여러마디식의 마디]

여러마디식을 한마디식의 합으로 볼 때 그 매 한마디식을 그 **여러마디식의 마디**라고 부른다.

모든 여러마디식은 한마디식들의 합으로 표시할수 있다.

[례] $3x^2 + 5xy + (-x^2y) + (-6xy^2)$



여러마디식을 거기에 들어있는 매 한마디식의 바로 뒤에서 끊으면 마디가 얻어진다. 여러마디식은 그 마디의 개수에 따라 2마디식, 3마디식, … 으로 가른다.

[례] $2xy - x^2y^3$ (2마디식)

[여러마디식의 차수]

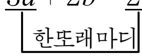
여러마디식의 마디들의 차수가운데서 제일 큰것(높은것)을 그 **여러마디식의 차수**라고 부른다.

[례] $3x+2$ 는 1차여러마디식이고 $5x^3+2x+3$ 은 3차여러마디식이다.

[한또래마디]

여러마디식의 마디들가운데서 글자부분이 같은 마디들을 **한또래마디**라고 부른다.

$$3a + 2b - 2a + 5$$



— 한또래마디의 정돈

한또래마디들의 공통인수인 글자부분을 괄호밖으로 내놓고 하나의 마디로 고치는것을 **한또래마디를 정돈한다**고 말한다.

[례] $3a + 2b + a - 5b + 1 = (3a + a) + (2b - 5b) + 1$

$$= (3+1)a + (2-5)b + 1 = 4a - 3b + 1$$

— 여러마디식의 정돈

여러마디식에서 한또래마디들을 정돈한 다음 마디들의 차수가 높아지는 차례로 또는 차수가 낮아지는 차례로 쓰

는것을 **여러마디식을 정돈한다**고 말한다.

정돈된 여러마디식을 차수와 마디의 개수에 따라 **1차 2마디식**, **2차 3마디식**, … 이라고 부른다.

［례］ $3x^2+2x+1$ (2차 3마디식)

[여러마디식의 산법]

— **여러마디식의 더하기**

괄호를 묶은 여러마디식을 더할 때에는

① 괄호를 풀면서 그안의 마디들을 그대로 이어쓴다.

② 얻은 여러마디식을 정돈한다.

［례］ $5x^2-x+2+(-x^3+2x^2-1)$

$$=5x^2-x+2-x^3+2x^2-1$$

$$=-x^3+7x^2-x+1$$

— **여러마디식의 덜기**

x에 관한 식(변하는 값을 대신하는 글자가 x만 들어있는 식)을 간단히 A(x), B(x), … 와 같이 표시한다.

괄호를 묶은 여러마디식을 덜 때에는

① 괄호를 풀면서 더는 여러마디식의 매 마디들의 부호를 바꾸어 이어쓴다.

② 얻은 여러마디식을 정돈한다.

［례］ $5a-(2a+b-4)=5a-2a-b+4=3a-b+4$

— **여러마디식의 곱하기**

한마디식에 여러마디식을 곱할 때에는 한마디식에 여러마디식의 매개 마디를 곱하고 정돈한다.

［례］ $a^2(ab^2+a^2b)=a^2ab^2+a^2a^2b=a^3b^2+a^4b$

두 여러마디식을 곱할 때에는 한 여러마디식의 매개 마디에 다른 여러마디식의 모든 마디를 각각 곱하고 정돈한다.

［례］ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

○ **곱하기공식**

여러마디식의 곱하기에 많이 리용되는 곱하기공식은 다음과 같다.

① $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

③ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

④ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

⑤ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑥ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

⑧ $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a+b+c)=a^3+b^3+c^3-3abc$

옹근수, 분수에서와 같이 여러마디식에서도 더하기, 곱하기에 관하여 바꿈법칙, 묶음법칙, 더하기에 관한 분배법칙이 성립한다.

○ **인수분해**

여러마디식을 몇개의 인수들의 적으로 변형하는것을 **인수분해한다**고 말한다.

○ **인수분해방법**

① 여러마디식에서 공통인수를 찾아서 인수분해하기

$$ma+mb=m(a+b)$$

$$a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$$

② 마디들을 묶어서 인수분해하기

$$3ax-by-3ay+bx=(3ax-3ay)+(bx-by)$$
$$=3a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(3a+b)$$

③ 마디를 갈라서 인수분해하기

$$2a^2+5ab+3b^2=2a^2+2ab+3ab+3b^2$$
$$=(2a^2+2ab)+(3ab+3b^2)=2a(a+b)+3b(a+b)$$
$$=(a+b)(2a+3b)$$

④ 곱하기공식을 리용하여 인수분해하기

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=(a-b-c)^2$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

인수분해하려는 여러마디식의 일부분을 하나의 글자로 바꾸어놓으면 인수분해가 쉽게 되는 경우가 있다.

[례] $(x^2+x+3)(x^2+x-1)-5$ 를 인수분해

풀이. $x^2+x+3=y$

$x^2+x-1=y-4$

$\therefore\ (x^2+x+3)(x^2+x-1)-5=y(y-4)-5=y^2-4y-5$

$=y^2-5y+y-5=(y^2-5y)+(y-5)=(y-5)(y+1)$

$=(x^2+x+3-5)\ (x^2+x+3+1)=(x^2+x-2)(x^2+x+4)$

$(x^2-x+2x-2)(x^2+x+4)=[(x^2-x)+(2x-2)](x^2+x+4)$

$=[x(x-1)+2(x-1)](x^2+x+4)=(x-1)(x+2)(x^2+x+4)$

○ **여러마디식의 약수와 배수**

여러마디식이 인수분해되였을 때 매개 인수를 주어진 여러마디식의 **약수** 그리고 그 여러마디식을 매 인수들의 **배수**라고 부른다.

[례] $x^2-4=(x+2)(x-2)$ 에서 $(x+2)$, $(x-2)$ 는 x^2-4 의 약수이고 x^2-4 는 $(x+2)$, $(x-2)$ 의 배수이다.

— 여러마디식의 나누기

여러마디식 $A(x)$ 를 여러마디식 $B(x)$ 로 나눈 상을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 할 때 즉

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

일 때 $R(x)$의 차수는 $B(x)$의 차수보다 낮다.

일반적으로 한변수여러마디식

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

을 $x-c$ 와 같은 1차2마디식으로 나눌 때 상과 나머지는 다음과 같은 도식을 써서 쉽게 구할수 있다.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
c & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
 & & + & + & \cdots & + & + & + \\
 & & ca_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-3} & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\
\hline
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & M
\end{array}$$

$a_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-2}$ — 상의 마디의 결수, b_{n-1} — 상수마디, M — 나머지

이 도식을 **호너의 도식**이라고 부른다.

［례］ $(x^3+x^2-14x-29)\div(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 1 & -14 & -29 \\
 & & -2 & 2 & 24 \\
\hline
 & 1 & -1 & -12 & -5
\end{array}$$

따라서 상은 x^2-x-12, 나머지는 -5

［례］ $(x^4-1)\div(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

따라서 상은 x^3+x^2+x+1, 나머지는 0

— 나머지정리와 인수정리

나머지정리. 여러마디식 $A(x)$ 를 $x-a$ 로 나눌 때의 나머지는 $x=a$일 때 $A(x)$의 값과 같다. 즉 $R=A(a)$

인수정리. 여러마디식 $A(x)$ 에서 $A(a)=0$ 이면 $A(x)$ 는 인수 $x-a$ 를 가진다. 그리고 A가 인수 $x-a$ 를 가지면 $A(a)=0$ 이다.

[례] $A(x)=x^3-5x^2-4x+2$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는

$$R=A(2)=2^3-5\cdot 2^2-4\cdot 2+2=8-20-8+2=-18$$

[례] 여러마디식 $A(x)=x^3-2x^2+x+4$ 은

$$A(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+(-1)+4=-1-2-1+4=0$$

이므로 인수 $x+1$ 을 가진다.

호너의 도식을 써서 $A(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 상을 구하면 x^2-3x+4 따라서

$$x^3-2x^2+x+4=(x+1)(x^2-3x+4)$$

미정결수법. 일반적으로 알려지지 않은 결수들을 정하는 방법을 **미정결수법**이라고 부른다.

여러마디식에서 미정결수법은 두 여러마디식이 늘 같기 위한 조건에 기초하고있다. 즉

모든 x 의 값에 대하여

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \Leftrightarrow a_0=a_1=\cdots=a_n=0$$

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+$$
$$+b_{n-1}x+b_n \Leftrightarrow a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_n=b_n$$

이밖에 x 에 수값을 넣어서도 결수들을 정할수 있다.

[례] $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+ax+b)$

에서 a, b 를 정하기 위하여

$$x^3+x^2+x+1=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$$

의 결수들을 비교하면

$a+1=1,\quad a+b=1,\quad b=1$ 이다.

따라서 $a=0,\ b=1$

2. 유리식

[유리식]

수와 변수들에 더하기나 덜기, 곱하기나 나누기를 해서 얻은 식을 **유리식**이라고 부른다.

모든 유리식은

$$\frac{\text{여러마디식}}{\text{령아닌 여러마디식}}$$

모양으로 표시할수 있다.

[분수식]

분모에 변수가 들어있는 분수모양의 식을 **분수식**이라고 부른다. 여러마디식을(한마디식포함) **옹근식**이라고도 부른다.

옹근식이나 분수식은 다 유리식이다.

분수식은 변수가 든 식으로의 나누기를 할 때 나온다. 즉 변수가 든 식으로의 나누기를 분수모양으로 표시한것이 분수식이다.

［례］ $\frac{3}{x}$, $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^3+2}{x^2+1}$ 은 다 분수식이다.

그러나 $\frac{x}{3}$, $\frac{3x+1}{2+\frac{1}{2}}$, $\frac{x^2+6}{9+\frac{1}{2}}$ 은 분모에 변수가 없으므로 분수식이 아니다.

— **분수식의 뜻구역**

변수가 든 식이 값을 가지게 되는 변수값전부의 모임을 그 식의 **뜻구역**이라고 부른다.

분수식의 뜻구역은 분모가 0이 되는 변수값을 빼버린 수전부의 모임이다.

［례］ 분수식

① $\dfrac{3x}{2x-10}$ ② $\dfrac{3}{x(x+1)}$ 의 뜻구역은

① 분모 $2x-10=0$ 이 되는 x 의 값 즉 $x=5$ 을 빼버린 수전부의 모임이다.

② 분모 $x(x+1)=0$ 이 되는 x 의 값 즉 $x=0,\ x=-1$ 을 빼버린 수전부의 모임이다.

— **분수식의 기본성질**

분수식도 분수에서와 같은 성질을 가진다.

① 분수식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 식을 곱해도 늘 같은 분수식이 나온다. 즉 a , b , c 가 어떤 식이든지 $b\neq 0,\ c\neq 0$ 이면

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$$

② 분수식의 분자, 분모를 0이 이닌 같은 식으로 나누어도 늘 같은 분수식이 나온다. 즉 a , b , c 가 어떤 식이든지 $b\neq 0,\ \ c\neq 0$ 이면

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a\div c}{b\div c}$$

— **분수식의 약분과 통분**

분수식의 분자, 분모를 그것들의 공통약수로 나누어 보다 간단한 모양으로 고치는것을 분수식을 **약분**한다고 말한다.

［례］ $\dfrac{12x^2yz^3}{18xy^2z}=\dfrac{2xz^2}{3y}$

분모가 서로 다른 분수식들을 분모가 같은 분수식들로 변형하는것을 분수식들을 **통분**한다고 말한다.

분수식들을 통분할 때 공통분모로는 보통 분모들의 최소공통배수를 잡는다.

［례］ $\frac{1}{4a^2b}$, $\frac{1}{6ab^2}$ 을 통분하면 분모들의 최소공통배수는 $12a^2b^2$ 이다.

그러므로

$$\frac{1}{4a^2b}=\frac{3b}{4a^2b\cdot 3b}=\frac{3b}{12a^2b^2}$$

$$\frac{1}{6ab^2}=\frac{2a}{6ab^2\cdot 2a}=\frac{2a}{12a^2b^2}$$

[분수식의 산법]

－ **분수식의 더하기와 덜기**

분수식의 더하기, 덜기도 분수의 더하기, 덜기처럼 한다.

① 분모가 같은 분수식들을 더하거나 덜자면 분모는 그대로 두고 분자들을 더하거나 던 다음 약분할것이 있으면 약분한다.

［례］ $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$, $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$

② 분모가 다른 분수식들을 더하거나 덜자면 먼저 통분하고 더하거나 던다.

［례］ $\frac{a}{ab+b^2}-\frac{b}{a^2+ab}=\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b}{a(a+b)}$

$$=\frac{a^2}{ab(a+b)}-\frac{b^2}{ab(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)}=\frac{a-b}{ab}$$

－ **분수식의 곱하기**

분수식의 곱하기는 분수의 곱하기처럼 한다.

분수식들을 곱하자면 분모끼리 곱하고 분자끼리 곱한 다음 정돈한다.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

［례］ $\frac{a}{2b}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{a\cdot b^2}{2b\cdot a^2}=\frac{b}{2a}$

– **분수식의 나누기**

분수식들의 나누기도 분수의 나누기처럼 한다.

나누는 분수식의 분자와 분모를 바꾼 다음 곱한다.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{bc}$$

［례］ $\frac{b^2}{6a^3}\div\frac{b}{4a^2}=\frac{b^2}{6a^3}\cdot\frac{4a^2}{b}=\frac{b^2\cdot 4a^2}{6a^3b}=\frac{2b}{3a}$

3. 제곱에 관한 식

[제곱]

a를 n개 곱한 적을 a^n으로 표시하고 《a의 n제곱》이라고 읽는다. 즉

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n}=a^n$$

이때 a를 **제곱밑수**, n을 **제곱지수**라고 부른다.

[지수법칙]

① $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ② $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}(m<n)$

③ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}(m>n)$ ④ $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{m\cdot n}$

⑤ $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ ⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

특히 $a^1=a$, $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$로 정한다.

[$\frac{1}{n}$제곱]

$n\geq 2$ $(n\in\mathrm{N})$, $a\geq 0$일 때 n제곱하여 a가 되는 부아닌 수를 $a^{\frac{1}{n}}$로 표시하고 a의 $\frac{1}{n}$**제곱**이라고 부른다. 즉 $n\geq 2$ $(n\in\mathrm{N})$, $a\geq 0$일 때 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a$ 되는 부아닌 $a^{\frac{1}{n}}$을 말한다.

$a^{\frac{1}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a}$ 와 같이 표시하기도 한다.

이때 $\sqrt{\ }$ 을 **뿌리기호**, n 을 **뿌리지수**, a 를 **뿌리밑수**라고 부른다.

$x^n = a$ 의 풀이를 n **차뿌리**라고 부른다.

n 차뿌리의 값

$n = 2k \ (k \in \mathrm{N})$ 일 때

① $a > 0 \to \sqrt[n]{a}, \ -\sqrt[n]{a} \ (a^{\frac{1}{n}}, \ -a^{\frac{1}{n}})$

② $a = 0 \to 0$

③ $a < 0 \to$ 없다

$n = 2k - 1 \ (k \in \mathrm{N})$ 일 때

① $a > 0 \to \sqrt[n]{a} \ (a^{\frac{1}{n}})$

② $a = 0 \to 0$

③ $a < 0 \to -\sqrt[n]{|a|} \ (-|a|^{\frac{1}{n}})$

［례］ $a^3 = 64$ 에서 $a = \sqrt[3]{64}$

$4^3 = 64$ 이므로 $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

$a^5 = -243$ 에서 $a = \sqrt[5]{-243}$

$(-3)^5 = -243$ 이므로 $\sqrt[5]{-243} = -3$

$a^4 = 81$ 에서 $a = \pm\sqrt[4]{81}$

$(\pm 3)^4 = 81$ 이므로 $\sqrt[4]{81} = 3$, $-\sqrt[4]{81} = -3$

— **$\frac{1}{n}$ 제곱의 성질**

$\frac{1}{n}$ 제곱의 정의에 의하여 $\left(\sqrt[n]{\mathrm{A}}\right)^n = \mathrm{A}$ 이다. 이 사실을 써서 부아닌 수의 $\frac{1}{n}$ 제곱의 성질들이 밝혀진다.

① $a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \mathrm{N}$ 일 때

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

② $a \geq 0,\ b > 0,\ n \in \mathrm{N}$ 일 때

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

③ $a \geq 0,\ \ m,\ n \in \mathrm{N}$ 일 때

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

④ $a \geq 0,\ k,\ m,\ n \in \mathrm{N}$ 일 때

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

⑤ $a \geq 0,\ \ m,\ n \in \mathrm{N}$ 일 때

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

이 성질을 다음과 같이 쓸수도 있다.

① $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ $(a \geq 0,\ \ b \geq 0,\ \ n \in \mathrm{N})$

② $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ $(a \geq 0,\ \ b > 0,\ \ n \in \mathrm{N})$

③ $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ $(a \geq 0,\ \ m,\ \ n \in \mathrm{N})$

④ $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{mk})^{\frac{1}{nk}}$ $(a \geq 0,\ \ m,\ \ n,\ \ k \in \mathrm{N})$

⑤ $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ $(a \geq 0,\ \ m,\ \ n \in \mathrm{N})$

［례］ $\sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

$$xy\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = x^{\frac{3}{3}} y^{\frac{3}{3}} y^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^2 y^4}$$

$$\sqrt[5]{\frac{-25\cdot625}{500000}}=-\sqrt[5]{\frac{5^2\cdot5^4}{5\cdot10^5}}=-\sqrt[5]{\left(\frac{5}{10}\right)^5}$$

$$=-\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{5}}=-\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

[$\frac{1}{2}$ 제곱 계산법]

수표를 리용하여 $\frac{1}{2}$ 제곱을 계산하는 방법도 있지만 여기서는 필산으로 구하는 방법을 보겠다. 원리는 다음 도식과 같다.

［례］ $\sqrt{98596}=314$

	3		1		4
3	9	8	5	9	6
3	9				
6 1		8	5		
1		6	1		
6 24		2	4	9	6
4		2	4	9	6
					0

$\sqrt{583.802244}=24.162$

	2		4.		1		6		2
2	5	8	3.	8	0	2	2	4	4
2	4								
44	1	8	3						
4	1	7	6						
481			7	8	0				
1			4	8	1				
4826			2	9	9	2	2		
6			2	8	9	5	6		
48322					9	6	6	4	4
2					9	6	6	4	4
									0

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2}=a+b+c$$

	$a + b + c$
a	$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
a	a^2
$2a + b$	$2ab + b^2$
b	$2ab + b^2$
$2a + 2b + c$	$2ac + 2bc + c^2$
c	$2ac + 2bc + c^2$
	0

— 겹 $\frac{1}{2}$ 제곱을 구하는 공식

겹 $\frac{1}{2}$ 제곱 $\sqrt{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}$ 를 대수적으로 구하는 방법의 하나는 다음과 같다.

$$\sqrt{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\ \ (x>0,\ y>0)$$

로 놓고 두 변을 2제곱하면

$$\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}=x+y\pm2\sqrt{xy}$$

여기서 $x+y=\mathrm{A},\ \ xy=\frac{\mathrm{B}}{4}$

로 놓고 $x,\ y$ 를 구하면

$$x=\frac{\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}}}{2},\qquad y=\frac{\mathrm{A}-\sqrt{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}}}{2}$$

따라서 다음의 공식을 얻는다.

$$\sqrt{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}-\sqrt{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}}}{2}}$$

이 공식은 $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}$ 가 어떤 수의 완전2제곱일 때에만 간단한 결과를 얻는다.

[례] $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}+$

$$+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$$

4. 무 리 식

[뿌리식]

뿌리기호가 들어있는 식을 **뿌리식**이라고 부른다.

[례] $\sqrt{3}$, $\sqrt{x-2}$, $\sqrt{\frac{a+1}{3}+2a-3}$ 등은 모두 뿌리식이다.

— **뿌리식의 뜻구역**

뿌리식의 뜻구역은 뿌리밑수가 0보다 작지 않은 변수값모임으로 된다.

[례] $\sqrt{x-2}$ 의 뜻구역은 $x-2\geq 0$ 되는 x 의 값모임 즉 $x\geq 2$ 이다.

— **인수를 뿌리기호밖으로 내보내기와 뿌리기호안에 넣기**

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

로부터

$$|a|\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a^2b}$$

로 된다.

— **뿌리식의 분모, 분자의 유리화**

분모(분자)에서 뿌리기호를 없애는것을 분모(분자)를 **유리화**한다고 말한다.

[례] $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$

[무리식]

밑수에 변수가 있는 뿌리식이 들어있는 식을 **무리식**이라고 부른다.

［례］ $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+1}$, $x^2+\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 은 다 무리식이다.

그러나 $x+\sqrt{13}$, $x\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 은 밑수에 변수가 없으므로 무리식이 아니다.

5. 지수식과 로그식

[지수식]

지수에 변수가 들어있는 식을 **지수식**이라고 부른다.

실례로 3^x+2^{x-2}, $3^{2x}+5^x-9$ 등은 지수식이고 $2+\sqrt{x}$, 3^2+x^2-7 은 지수식이 아니다.

［례］ 방정식 $2^{3+x}+3\cdot 2^x+7$ 을 정돈하여라.

풀이. $2^{3+x}+3\cdot 2^x+7=2^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x+7$

$$=8\cdot 2^x+3\cdot 2^x+7=11\cdot 2^x+7$$

지수식 a^x 은 임의의 x 에 대해서도 그 값이 늘 정수이다. 즉 $a^x>0$

$a>1$ 일 때 a^x 의 값은 $x<0$ 이면 1보다 작고 $x>0$ 이면 1보다 크다.

$a>1$ 일 때 $x_1>x_2$ 이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$ 이다.

$0<a<1$ 일 때 $x_1>x_2$ 이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$ 이다.

［례］ 다음 수들을 작은것부터 커지는 차례로 써라.

$$2^{2.3},\quad 2^{-0.7},\quad 2^{-1.9},\quad 2^{-1.5},\quad 2^{2.6},\quad 2^0$$

풀이. 주어진 제곱들의 지수들만 비교해보면

$$-1.9<-1.5<-0.7<0<2.3<2.6$$

2＞1이므로 지수들의 크기순서는 곧 주어진 수들의 크기순서로 된다.

$$2^{-1.9} < 2^{-1.5} < 2^{-0.7} < 2^{0} < 2^{2.3} < 2^{2.6}$$

[로그]

$a>0$, $a\neq 1$일 때 $a^{x}=m$을 만족시키는 변수 x의 값을 a를 밑수로 하는 m의 **로그**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\log_a m$$

이것을 《로그 a, m》이라고 읽는다.

$a\neq 1$, $a>0$, $m>0$일 때

$$a^{\alpha}=m \Leftrightarow \alpha=\log_a m$$

［례］ 2^4 ＝16이므로 $\log_2 16=4$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16 \text{이므로 } \log_{\frac{1}{2}} 16=-4$$

※ $(-2)^3=-8$, $1^{100}=1$이라고 하여

$\log_{-2}-8=3$, $\log_1 1=100$이라고 하여서는 안된다.

[로그식]

로그기호안에 변수가 들어있는 식을 **로그식**이라고 부른다.

[로그의 성질]

로그의 정의에 의하여 즉 $a^{\alpha}=m$ $(a\neq 1,\ a>0,\ m>0)$이면 $\alpha=\log_a m$이라는 관계가 성립한다는 사실에 기초하여 로그의 성질이 밝혀진다. 즉

$$a^{\alpha}=m \Leftrightarrow a^{\log_a m}=m$$

① $m_1>0$, $m_2>0$일 때

$$\log_a(m_1\cdot m_2)=\log_a m_1+\log_a m_2$$

② $m>0$, $\alpha\in \mathrm{R}$일 때

$$\log_a m^{\alpha}=\alpha\log_a m$$

③ $m_1 > 0, \quad m_2 > 0$ 일 때

$$\log_a \frac{m_1}{m_2} = \log_a m_1 - \log_a m_2$$

④ $b > 0$ 일 때 $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$ (밑수변환공식)

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

⑤ $c > 0$ 일 때

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

［례］ $\log_2(16 \cdot 32) = \log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5 = 9$

$$\log_{10} 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{10} 10 = \frac{1}{4}$$

$$\log_{10}\frac{16}{5} = \log_{10} 16 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2^4 - \log_{10}\frac{10}{2}$$

$$= 4\log_{10} 2 - \log_{10} 10 + \log_{10} 2 = 5\log_{10} 2 - 1$$

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}$$

$$\log_3 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$$

$$= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5} \cdot \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 6} \cdot \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 7} \cdot \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 8}$$

$$= \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 3} = \log_3 9 = 2$$

[상용로그] 밑수가 10인 로그를 **상용로그**라고 부른다.

m 의 상용로그 $\log_{10} m$ 을 간단히

$$\lg m$$

와 같이 표시하고 《로그 m》이라고 읽는다.

만일 $A = a \cdot 10^m \quad (1 \le a \le 10, \quad m \in I)$

으로 표시되였다면 정수 A 의 상용로그는

$$\lg A = \lg(a \cdot 10^m) = m + \lg a$$

로그의 옹근수부와 소수부

$A = a \cdot 10^m \Leftrightarrow \lg A = m + \lg a, \quad [\lg A] = m, \quad \{\lg A\} = \lg a$

$(1 \le a \le 10, \quad m \in I)$

상 식

로그와 지수법칙을 발견한 네피어
(1550-1617, 스코틀랜드)

네피어는 13살 때 대학에 입학하였다. 천문학을 연구하다가 간단한 계산법의 필요성을 느끼였다. 그리하여 그는

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

을 발견하고 뒤이어 로그를 발견하였다. 네피어는 1614년에 《신기한 로그규칙》이라는 책을 내놓았다.

6. 삼각식

[삼각비]

$\sin\alpha = \dfrac{b}{r}$: 시누스 α

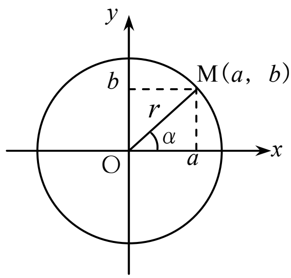
$\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$: 코시누스 α

$\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$: 탕겐스 α

$\cot\alpha = \dfrac{a}{b}$: 코탕겐스 α

$\sec\alpha = \dfrac{r}{a}$: 세칸스 α

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{b}$: 코세칸스 α



각 α의 시누스, 코시누스, 탕겐스, 코탕겐스, 세칸스, 코세칸스를 통털어 **삼각비**라고 부른다. 그리고 sin, cos, tan, cot, sec, cosec를 **삼각기호**라고 부른다.

[삼각식]

삼각기호밑에 변수가 들어있는 식을 **삼각식**이라고 부른다.

실례로 $\sin x$, $\cos x+\tan x$ 등은 삼각식이지만 $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$ 등은 삼각식이 아니다.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

이므로 모든 삼각식은 시누스, 코시누스만으로 된 식으로 바꿀수 있다.

– 기본삼각늘같기식

임의의 각 α에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

① $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

② $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

③ $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

④ $1+\cot^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

[전화공식]

부각의 삼각식에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

그리고 다음 공식들도 성립한다.

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha,\quad \cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$$

이상의 공식을 **기본전환공식**이라고 부른다.

기본전환공식에 의하여 다음의 전환공식들도 얻는다.

$$\sin(180^\circ\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\quad \cos(180^\circ\pm\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(180^\circ\pm\alpha)=\pm\tan\alpha,\quad \cot(180^\circ\pm\alpha)=\pm\cot\alpha$$

$$\sin(270^\circ\pm\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(270^\circ\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$$

$$\tan(270^\circ\pm\alpha)=\mp\cot\alpha$$

［례］ $\sin(270^\circ+\alpha)=\sin(180^\circ+90^\circ+\alpha)=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$

$$\tan(270^\circ+\alpha)=\tan(180^\circ+90^\circ+\alpha)=\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cos(270^\circ+\alpha)=\cos(180^\circ+90^\circ+\alpha)=-\cos(90^\circ+\alpha)=\sin\alpha$$

[더하기공식]

두 각의 합과 차에 대한 삼각함수공식들은 다음과 같다.

① 합과 차의 시누스

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

② 합과 차의 코시누스

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

③ 합과 차의 탕겐스

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

④ 합과 차의 코탕겐스

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

［례］ $\sin 75° = \sin(30° + 45°)$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75° = \tan(30° + 45°) = \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan 45°}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

[배각의 공식]

더하기공식에서 $\beta = \alpha$ 로 놓으면 다음의 배각의 공식을 얻는다.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

［례］ $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

[반각의 공식]

배각의 공식에서 α를 $\frac{\alpha}{2}$로 바꾸어 반각의 공식을 얻는다.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

［례］ $\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2\cos^2 15°-1=\cos^2 15°+\cos^2 15°-1$$

$$=\cos^2 15°+1-\sin^2 15°-1=\cos^2 15°-\sin^2 15°$$

$$=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[적을 합으로 표시하는 공식]

더하기공식으로부터 삼각함수의 적을 합으로 표시하는 공식을 얻는다.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=-\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=-\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

［례］ $$\sin75°\cos15°=\frac{\sin(75°+15°)+\sin(75°-15°)}{2}$$

$$=\frac{\sin90°+\sin60°}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos3\alpha=\frac{\cos(\alpha+3\alpha)+\cos(\alpha-3\alpha)}{2}$$

$$=\frac{\cos4\alpha+\cos(-2\alpha)}{2}=\frac{\cos4\alpha+\cos2\alpha}{2}$$

[합을 적으로 표시하는 공식]

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

［례］ $$\sin80°-\sin40°=2\cos\frac{80°+40°}{2}\sin\frac{80°-40°}{2}$$

$$=2\cos60°\sin20°=2\cdot\frac{1}{2}\sin20°=\sin20°$$

$$1-\sin\alpha=\sin 90^\circ-\sin\alpha=2\cos\frac{90^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left[90^\circ-\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$$

상 식

세계에서 처음으로 삼각계산기를 발명한
우리 나라의 수학자 남병길(1820-1869)

우리 나라의 수학자이며 천문학자인 남병길은 일찍부터 형 남병철의 도움을 받으면서 수학과 천문학을 같이 연구하였다. 그는 구면에서 삼각계산을 기계적인 방법으로 쉽게 할수 있는 계산기인 《량도의》를 만들었다. 복잡한 계산을 기계로 하려는 시도는 다른 나라에서도 있었지만 삼각계산기를 처음으로 만든 사람은 남병길이였다.

제3장. 함 수

1. 비와 비례

[비]

두 수(또는 두 량)를 비교할 때 한 수(또는 한 량)를 a라고 보면 다른 수(또는 다른 량)는 b라는 관계에 있다는것을

$$a : b$$

와 같이 쓰고 이것을 **비**라고 부른다. 그리고 《a **대** b》 또는 《a**와** b**의 비**》라고 읽는다.

$$a \quad : \quad b$$

앞마디　비기호　뒤마디

$a : b$를 《b에 대한 a의 비》라고 부를 때도 있다.

량들의 비는 보통 단위를 같아지게 고쳐서 고찰한다.

비 $a : b$에서 앞마디를 뒤마디로 나눈 상 $\frac{a}{b}$를 그 **비의 값**이라고 부르고 다음과 같이 쓴다.

$$a : b = \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$$

두 비 $a : b$와 $c : d$의 값이 같을 때 **두 비는 같다**고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

※ 비를 구한다는것과 비의 값을 구한다는것이 같은것은 아니다.

[비의 기본성질]

① $a : b = ca : cb \ (c \neq 0)$

② $a : b = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} \ \ (c \neq 0)$

비의 기본성질을 써서 비를 간단한 옹근수의 비로 그 모양을 고치는것을 **비를 간단히 한다**고 말한다.

［례］ 1) $0.75:1.25=75:125=3:5$

2) $3\frac{1}{3}:1\frac{2}{5}=\frac{10}{3}:\frac{7}{5}=50:21$

련비. 세 량 a, b, c를 비교할 때 $a:b$, $b:c$이면 비교하는 량들을 비기호로 이어서

$$a:b:c$$

와 같이 쓴다. 이와 같은 비를 **련비**라고 부른다.

［례］ 세멘트와 모래의 비가 1 : 2, 모래와 자갈의 비가 2 : 3일 때 세멘트, 모래, 자갈의 비는 1 : 2 : 3

련비의 값은 생각할수 없다.

련비에서도 비의 매개 마디에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 비의 매개 마디를 같은 수로 나누어도 그 비는 변하지 않는다.

[비례식]

두 비를 갈기기호로 이어서 만든 갈기식을 **비례식**이라고 부른다.

바깥마디

$$a:b=c:d$$

아낙마디

특히 $a:b=b:d$

비례가운데마디

비례식도 갈기식이므로 옳은것과 옳지 않은것이 있을수 있다. 실례로 $2:3=4:7$은 옳지 않은 비례식이다.

모르는 수 x가 들어있는 비례식 $x : 3 = 4 : 6$에서 x를 구하는것을 **비례식을 푼다**고 말한다.

[례] 비례식 $x : 35 = 2 : 10$을 풀어라.

풀이. $x \cdot 10 = 35 \cdot 2$

$10x = 70$

$x = 7$

— **비례식의 성질**

① $a : b = c : d$ 이면 $ad = bc$ (기본성질)

② $a : b = c : d$ 이면

$$c \neq 0 \text{ 일 때 } a = \frac{bc}{d}, \quad b = \frac{ad}{c}$$

$$a \neq 0 \text{ 일 때 } c = \frac{ad}{b}, \quad d = \frac{bc}{a}$$

③ $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$ 일 때 $ad = bc$ 이면

$$a : b = c : d, \quad b : a = d : c$$

$$a : c = b : d, \quad c : a = d : b$$

④ $a : b = c : d$이면 $m \neq 0,\ n \neq 0$ 일 때

$$ma : mb = nc : nd, \quad ma : nb = mc : nd$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}, \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

⑤ 유도비례식은 다음과 같다.

$a : b = c : d$ 이면

- $(a \pm c):(b \pm d) = a:b = c:d \quad (b \pm d \neq 0)$
- $(a+c):(a-c) = (b+d):(b-d) \quad (a-c \neq 0)$
  $(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d) \quad (a-b \neq 0)$
- $(a \pm b):b = (c \pm d):d$
- $(a \pm b):a = (c \pm d):c$

⑥ $a : b = c : d,\ p : q = r : s$이면

$$ap : bq = cr : ds$$

$$a^n : b^n = c^n : d^n$$

⑦ $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$이면

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) =$$

$$= a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$$

또는 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0)$$

— 비와 %와의 관계

a가 A의 n%이면 A∶a = 100∶n

↓ ↓

(부분)(전체)

［례］ 25명의 72%는 몇명인가?

풀이. 25가 100%이므로 72%인 학생수를 x라고 하면

$$25 : 100 = x : 72$$

$$100x = 25 \times 72$$

$$x = 18$$ 답. 18명

[비례]

두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식 $y = ax (a \neq 0)$로 표시될 때 **y는 x에 비례한다**고 말하고 상수 a를 **비례결수**라고 부른다.

이때 비례관계 $y = ax$라고도 말한다.

［례］ 어떤 자동차가 x시간 달린 거리 $y$km를 나타낸 표가 다음과 같을 때

x(시간)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y(km)	20	30	60	120	180	240

자동차가 달린 거리 y는 달린 시간 x에 비례하고 비례결수는 60이다. 즉 $y = 60x$

$y = ax$는 $\dfrac{y}{x} = a$와 같다.

$y=ax$ 이면 $x=\frac{1}{a}y$ 이므로 y가 x에 비례하면 x도 y에 비례한다.

※ 두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식

$$y=ax^2 (a\neq 0)$$

으로 표시될 때 y**는** x^2**에 비례한다**고 말한다.

[거꿀비례]

두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식

$$y=a\frac{1}{x}\ (a\neq 0)$$

로 표시될 때 y는 x에 **거꿀비례한다**고 말하고 상수 a를 **거꿀비례결수**라고 부른다.

이때 거꿀비례 $y=a\frac{1}{x}$이라고도 말한다.

$y=a\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy=a \Leftrightarrow x=a\frac{1}{y}$ 이므로 y가 x에 거꿀비례하면 x도 y에 거꿀비례한다.

※ 두 량 x, y에 대하여 x와 y사이의 관계가 식

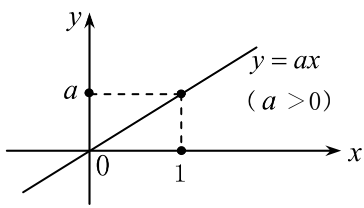
$$y=a\frac{1}{x^2}\ (a\neq 0)$$

로 표시될 때 y는 x^2에 **거꿀비례한다**고 말한다.

— **비례와 거꿀비례의 그라프**

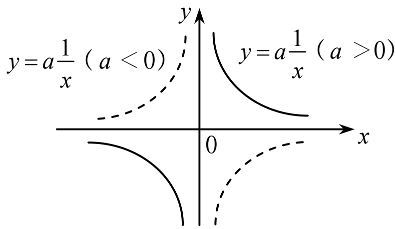
○ x, y자리표가 $y=ax$에 맞는 점전부의 모임을 **비례** $y=ax$ **의 그라프**라고 부른다.

비례 $y=ax(a\neq 0)$의 그라프는 자리표원점 (0, 0)과 점 (1, a)를 맺는 직선이다.



○ x, y자리표가 $y=a\frac{1}{x}$ 에 맞는 점전부의 모임을 $y=a\frac{1}{x}$ **의 그라프**라고 부른다. 이런 모양의 그라프를 **쌍곡선**이라고 부른다.

거꿀비례 $y=a\frac{1}{x}(a\neq 0)$ 의 그라프는 두 부분으로 갈라지는데 한쪽 부분의 점들은 다른쪽 부분의 점들과 자리표원점에 관하여 대칭이다.

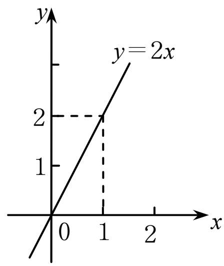


2. 1차, 2차식의 그라프

[1차식의 그라프]

1차식 $y=ax+b$ 에서 x 에 값을 주면 y 가 정해진다.

이때 $y=ax+b$ 에서 $(x,\ y)$ 로 정해지는 점들전부를 **1차식 $y=ax+b$ 의 그라프**라고 부른다.



［례］ 비례 $y=2x$ 의 그라프를 그리면 그림과 같다. 이것은 $a=2$, $b=0$ 인 1차식 $y=ax+b$ 의 그라프이다.

1차식 $y=ax+b$ 의 그라프는 비례 $y=ax$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 b만큼 평행이동한것이다.

비례 $y=ax$ 의 그라프는 직선이다. 그러므로 $y=ax+b$ 의 그라프도 직선이다.

이것을 간단히 《직선 $y=ax+b$ 》라고 부를 때도 있다.

직선 $y=ax+b$ 는 여기에 놓이는 아무런 두 점만 알면 쉽게 그릴수 있다.

［례］ $y=2x-3$ 의 그라프를 그려라.

풀이. x에 적당한 두 값, 례를 들어 -1 과 3 을 주어 y 의 값을 구하면

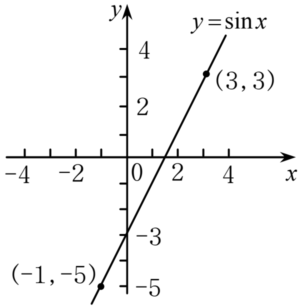
$x=-1$일 때

$y=2\cdot(-1)-3=-5$

$x=3$일 때

$y=2\cdot3-3=3$

따라서 $y=2x-3$ 의 그라프는 두 점 $(-1,\ -5)$ 와 $(3,\ 3)$ 을 지나는 직선을 그으면 된다.



$y=ax+b$ 의 그라프를 그릴 때 그것의 두 점가운데서 한 점은 그라프가 y축과 사귀는 점 $(0,\ b)$로 잡는것이 편리하다.

[2차식의 그라프]

2차식 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)에서 x에 값을 주면 y가 결정된다.

$y=ax^2+bx+c$ 에서 $(x,\ y)$ 로 정해지는 점들전부를 2차식 $y=ax^2+bx+c$ **의 그라프**라고 부른다.

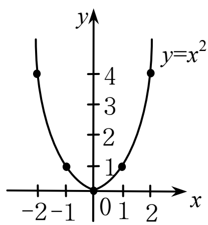
2차식 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프도 1차식 $y=ax+b$ 의 그라프를 그리는것과 류사한 방법으로 그린다.

[례] $y=x^2$ 의 그라프를 그려라.

풀이.

x	…	−2	−1	0	1	2	…
y	…	4	1	0	1	4	…

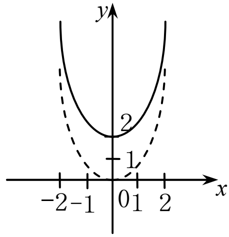
자리표평면에 점 …, (−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), …들을 찍고 미끈한 선으로 이으면 그리려는 곡선이 얻어진다.



2차식 $y=x^2+a$ 의 그라프는 $y=x^2$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 a만큼 평행이동하면 얻어진다.

［례］ $y=x^2+2$ 의 그라프를 그려라.

풀이. $y=x^2$의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=x^2+2$의 그라프가 얻어진다.



3. 1차, 2차함수와 그라프변환

[함수와 그라프]

변수 x의 매개 값에 변수 y의 값을 꼭 하나씩 대응시키는 규칙 f를 **함수**라고 부르고

$$y=f(x)$$

로 표시한다. 이때 x를 **독립변수**, y를 **종속변수**라고 부른다.

함수 $y=f(x)$가 값을 가지는 독립변수 x값전부의 모임을 이 함수의 **뜻구역**, 함수값전부의 모임을 **값구역**이라고 부른다.

함수 $y=f(x)$의 독립변수의 값과 그것에 대응하는 종속변수의 값을 자리표로 가지는 점전부의 모임 $\{(x,\ y)\}$를 **함수의 그라프**라고 부른다.

[1차함수]

변수 x에 관하여 1차식으로 표시되는 함수를 **1차함수**라고 부른다. 1차함수의 일반모양은 다음과 같다.

$$y=ax+b\ \ (a\neq0)$$

특히 $b=0$이면 $y=ax$

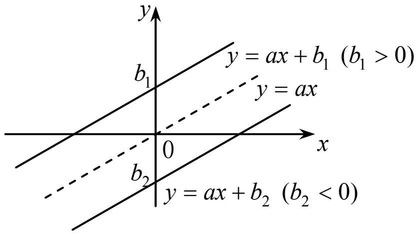
［례］ 처음온도가 12℃인 물을 덥힌다. 매 분마다 물의 온도가 0.5℃씩 올라간다고 하면 x분후의 물의 온도 y는 다음 식으로 표시된다.

$$y=0.5x+12$$

즉 물의 온도 y는 시간 x의 1차함수이다.

[1차함수의 그라프]

1차함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 1차식의 그라프이다. 1차함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 직선 $y=ax$ 를 y 축의 정방향으로 b 만큼 평행이동하여 얻을수 있다.

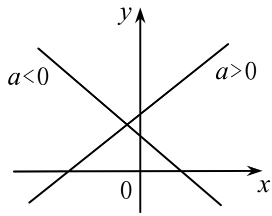


– **1차함수의 그라프변환**

○ 함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 b 가 커짐에 따라 y 축의 정방향으로 평행이동된다.

$y=ax+b$ 의 그라프의 방향은 a 의 값의 부호를 보고 판정할수 있다.

$a>0$ 이면 이 그라프는 오른쪽으로 감에 따라 우로 오르는 직선이고 $a<0$ 이면 아래로 내리는 직선이다.



○ 함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 a 의 값이 커짐에 따라 점 $(0,\ b)$ 를 중심으로 하여 시계바늘이 도는 방향과 반대방향으로 돈다.

a 는 함수 $y=ax+b$ 가 표시하는 직선의 기울어진 정도 즉 방향을 정한다. 그러므로 결수 a 를 **직선의 방향결수**라고 부른다.

［례］ 함수 $y=0.9x-3$ 과 $y=0.9x+0.5$ 는 직선의 방향결수가 같다.

그러므로 이 두 함수의 그라프는 서로 평행인 직선이다.

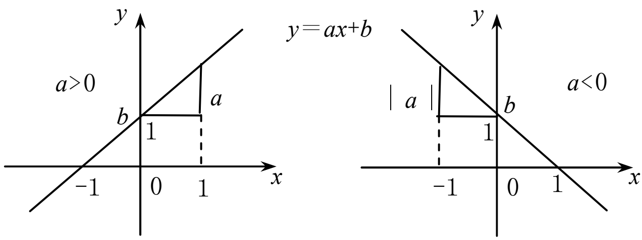
이처럼 $y=ax+b$ 에서 a 와 b의 값을 알면 이 함수의 그라프가 자리표평면에서 어디에 놓이는 직선인가를 쉽게 알수 있다.

― **1차함수의 성질**

함수 $y=ax+b$ 에서

① $a>0$ 일 때 독립변수 x 의 값이 늘면 함수 y 의 값도 는다. 이때 함수는 **증가한다**고 말한다.

② $a<0$ 일 때 독립변수 x 의 값이 늘면 함수 y 의 값은 준다. 이때 함수는 **감소한다**고 말한다.



［례］ 함수 $f(x)=16.9x-1.5$ 는 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가? 두 값 $f(37.87)$ 과 $f(46.29)$ 가운데서 어느것이 큰가?

풀이. $a=16.9>0$ 이므로 함수 $f(x)=16.9x-1.5$ 는 증가하는 함수이다.

그리고 $37.87<46.29$이므로 $f(37.87)<f(46.29)$

― **1차함수의 변화비**

함수 $y=ax+b$ 에서 독립변수의 변화량에 대한 함수의 변화량의 비를 **1차함수의 변화비**라고 부른다. 즉

$$\frac{\text{함수값의 변화량}}{\text{독립변수값의 변화량}}=\text{변화비}$$

1차함수 $y=ax+b$ 의 변화비는 일정하고 그것은 방향결수 a 와 같다.

변화비가 정수일 때 그것이 클수록 함수는 빨리 증가한다.

［례］ 독립변수의 값이 3만큼 늘 때 함수 $y=2-7x$ 의 값은 얼마나 변하는가?

풀이. 변화비가 $a=-7$ 이므로 함수 $y=2-7x$ 는 독립변수 x 가 1만큼 늘 때 함수값이 7만큼 감소한다.
따라서 독립변수의 값이 3만큼 늘 때

$$-7\cdot 3=-21$$

즉 함수값이 21만큼 감소한다.

[2차함수]

독립변수에 관하여 2차식으로 표시되는 함수를 **2차함수**라고 부른다. 2차함수의 일반모양은 다음과 같다.

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$$

[2차함수 $y=ax^2$ ($a>0$)의 그라프]

$a>0$ 일 때 $y=x^2$ 의 그라프를 y 축의 정방향으로 a 배하면 $y=ax^2$ 의 그라프가 된다.

$a>0$ 일 때 $y=ax^2$ 과 $y=-ax^2$ 의 그라프는 x축에 관하여 서로 대칭이다.

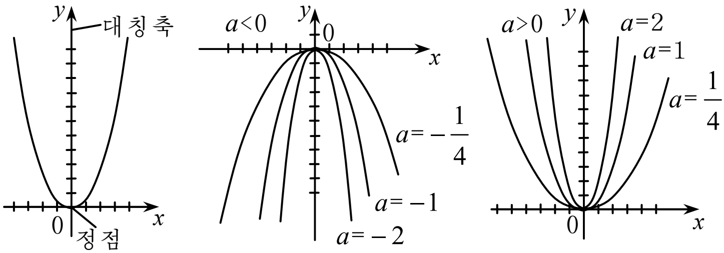
－ **$y=ax^2$ 의 그라프의 성질**

① 그라프는 늘 원점을 지난다.

② 그라프는 y 축에 관하여 대칭이다.

③ $a>0$ 이면 그라프는 x 축의 웃쪽 반평면에 놓이며 우로 벌어진다. $a<0$ 이면 그라프는 x 축의 아래쪽 반평면에 놓이며 아래로 벌어진다.

④ $|a|$ 가 클수록 그라프는 오무라지고 작을수록 벌어진다.

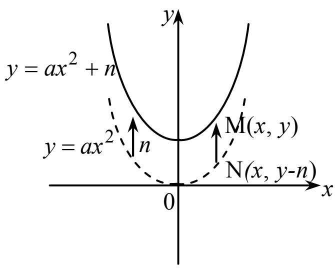


함수 $y=ax^2(a\neq 0)$ 의 그라프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 부른다.

$y=ax^2$ 의 그라프에서 y 축을 **대칭축**, 대칭축과의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

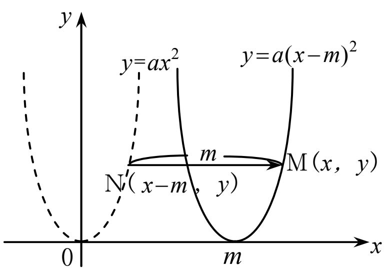
— $y=ax^2+n$ **의 그라프**

함수 $y=ax^2$ 의 그라프를 y 축의 정방향으로 n 만큼 ($n>0$ 이면 우로, $n<0$ 이면 아래로) 평행이동하면 $y=ax^2+n$ 의 그라프가 얻어진다.



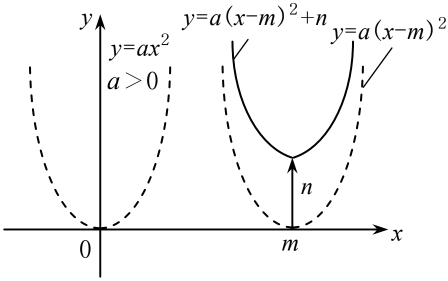
— $y=a(x-m)^2$ **의그라프**

$y=ax^2$ 의 그라프를 x 축의 정방향으로 m만큼 ($m>0$ 이면 오른쪽으로, $m<0$ 이면 왼쪽으로) 평행이동하면 $y=a(x-m)^2$ 의 그라프가 얻어진다.



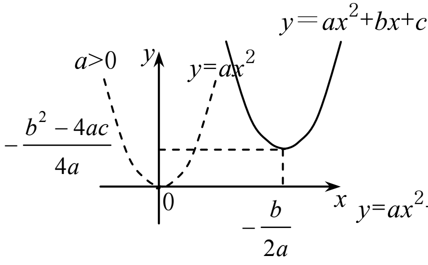
— $y=a(x-m)^2+n$ 의 그라프

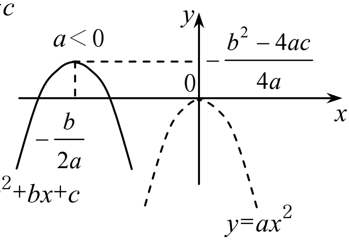
$y=ax^2$ 의 그라프를 x 축의 정방향으로 m 만큼 평행이동한 다음 련이어 y 축의 정방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y=a(x-m)^2+n$ 의 그라프가 나온다.



— $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프

2차함수 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 의 그라프는 $y=ax^2$ 의 그라프로부터 얻을수 있다.





$b^2-4ac=\mathrm{D}$ 로 표시하면

$$y=ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{D}}{4a}$$

그러므로 $y=ax^2$ 의 그라프를 x 축의 정방향으로 $-\frac{b}{2a}$ 만큼 평행이동한 다음 련이어 y 축의 정방향으로 $-\frac{D}{4a}$ 만큼 평행이동하면 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프가 얻어진다.

2차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 점 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ 를 정점으로 가지는 포물선이다.

$a>0$ 이면 우로 벌어지고 $a<0$ 이면 아래로 벌어진다.

$y=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 $y(0)=c$ 이므로 점 $(0,\ c)$ 에서 y 축과 사귄다.

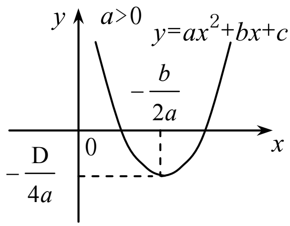
— **2차함수의 성질**

2차함수 $y=ax^2+bx+c$ 는

① $a>0$ 일 때

$$y=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{D}{4a}\geq-\frac{D}{4a}$$

따라서 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최소값 $-\frac{D}{4a}$ 를 가진다.

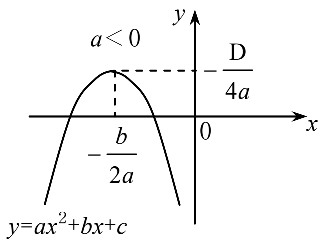


구간 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$에서 감소하고 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$에서 증가한다.

② $a<0$ 일 때

$$y=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2-\frac{D}{4a}\leq-\frac{D}{4a}$$

따라서 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최대값 $-\frac{D}{4a}$ 를 가진다.



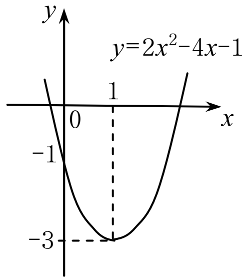
구간 $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)$에서 증가하고 $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$에서 감소한다.

함수값이 증가하는 구간, 감소하는 구간을 각각 그 함수의 **증가구간, 감소구간**이라고 부른다.

[례] 함수 $y=2x^2-4x-1$의 최대값 또는 최소값을 구하여라. 어느 구간에서 감소하고 어느 구간에서 증가하는가? 이 함수의 그라프를 대략 그려라.

풀이. $a=2>0$이므로 이 2차함수의 그라프는 우로 벌어진 포물선이다. 따라서 최소값을 가진다.

$$\begin{aligned}y&=2x^2-4x-1\\&=2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)\\&=2\left(x^2-2x+1^2-1^2-\frac{1}{2}\right)\\&=2\left[(x-1)^2-\frac{3}{2}\right]\\&=2(x-1)^2-3\geq-3\end{aligned}$$



이로부터 이 함수는 $x=1$에서 최소값 -3을 가진다. 또 $y(0)=-1$이므로 이 함수의 그라프는 점 $(0,\ -1)$에서 y축과 사귀며 점 $(1,\ -3)$을 정점으로 하는 포물선이다. 그라프를 보면 함수는 $(-\infty,\ 1)$에서 감소하고 $(1,\ +\infty)$에서 증가한다.

4. 넘기기와 함수

[넘기기]

어떤 규칙 f에 의하여 모임 X의 매개 원소에 모임 Y의 꼭 하나의 원소가 대응하면 이 규칙 f를 X를 Y로 보내는 **넘기기**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f : X \to Y \text{ 또는 } X \xrightarrow{f} Y$$

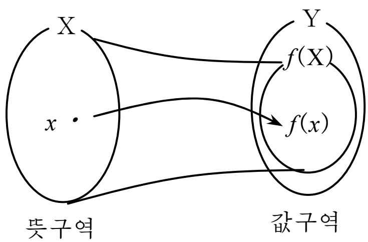
[함수]

수모임을 수모임으로 보내는 넘기기를 **함수**라고 부른다.

넘기기 $f : X \to Y$에서 모임 X의 원소 x에 모임 Y의 원소 y가 대응하면 y를 넘기기 f에 의한 x의 **영상**, x를 y의 **원상**이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$y = f(x), \ f : x \to y$$

그리고 X를 넘기기 f의 **뜻구역**, $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$를 넘기기 f의 **값구역**(X의 **영상**)이라고 부른다.



앞으로 함수에 대해서는 $Y = f(X)$인 경우만 고찰한다.

넘기기 $f : X \to Y$에서 모임 Y의 매개 원소가 꼭 하나의 원상을 가지면 이 넘기기를 **1대1 넘기기**라고 부른다.

[거꿀넘기기]

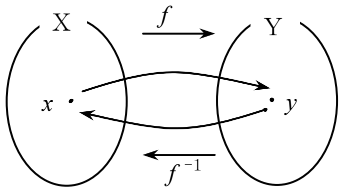
1대1넘기기 $f : X \to Y$에서 Y의 매개 원소에 그 원상을 대응시키는 넘기기를 f의 **거꿀넘기기**라고 부르고

$$f^{-1} : Y \to X, \ x = f^{-1}(y)$$

로 표시한다. (f 를 f^{-1}의 원넘기기)

[거꿀함수]

f가 함수이면 그 거꿀넘기기를 함수 f 의 **거꿀함수**라고 부른다. (f 를 f^{-1}의 **원함수**라고 부른다.)



독립변수를 x, 종속변수를 y로 표시하는 관례에 따라 거꿀함수 $x=f^{-1}(y)$ 를 보통 $y=f^{-1}(x)$ 로 쓴다.

함수 $y=f(x)$가 증가만 하거나 감소만 하면 $y=f(x)$의 거꿀함수가 있다.

함수 $f(x)$가 x에 관한 식이고 함수 $y=f(x)$에 거꿀함수가 있을 때 이 거꿀함수는 다음과 같이 구한다.

원함수 　　　　　　　　거꿀함수

$$y=f(x) \rightarrow x=f^{-1}(y) \rightarrow y=f^{-1}(x)$$

(x에 관하여 푼다.) 　　　　(x와 y를 서로 바꾼다.)

［례］ 함수 $y=1-\frac{x}{2}$의 거꿀함수를 구하여라.

풀이. 주어진 함수는 뜻구역에서 감소하므로 거꿀함수를 가진다.

$y=1-\frac{x}{2}$ 를 x에 관하여 풀면 $x=2-2y$

x와 y를 바꾸면 거꿀함수 $y=2-2x$ 를 얻는다.

– 원함수와 거꿀함수의 그라프사이의 관계

함수 $y=f(x)$ 와 그 거꿀함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그라프는 직선 $y=x$ 에 관하여 서로 대칭이다.

［례］ 함수 $y=x^2(x \geq 0)$의 거꿀함수를 구하고 그라프를 그려라.

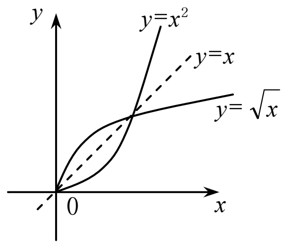
풀이. 함수 $y=x^2(x \geq 0)$은 구간 $[0, +\infty)$ 에서 증가하므로 거꿀함수를 가진다.

$y=x^2$ 을 x에 관하여 풀면 $x=\pm\sqrt{y}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=\sqrt{y}$

따라서 거꿀함수는 $y=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$

$y=\sqrt{x}(x\geq 0)$ 의 그라프를 그리자.



$x\geq 0$이므로 $y\geq 0$ 이다.

$y=\sqrt{x}$ 의 두 변을 2제곱하면 $y^2=x$

이것은 원점을 지나고 x축에 관하여 대칭인 포물선이다. 그런데 $x\geq 0$, $y\geq 0$이므로 그라프는 1사분구의 포물선이다.

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프는 1사분구에서 $y=x^2$ 의 그라프와 직선 $y=x$ 에 관하여 대칭이라는것을 알수 있다.

[짝함수와 홀함수]

뜻구역의 모든 점에서 늘 $f(-x)=f(x)$ 가 성립하면 함수 f를 **짝함수**, 늘 $f(-x)=-f(x)$ 가 성립하면 함수 f를 **홀함수**라고 부른다.

[례] $y=x^2$ 은 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 $(-x)^2=x^2$ 이므로 짝함수이다.

$y=x^3$ 은 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 $(-x)^3=-x^3$ 이므로 홀함수이다.

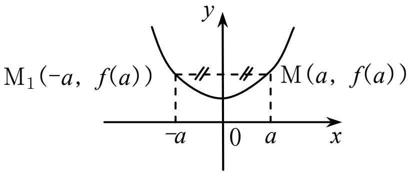
[례] $y=x^2-2x+1$ 은 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 $f(x)=x^2-2x+1$,

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+1=x^2+2x+1$ 이므로

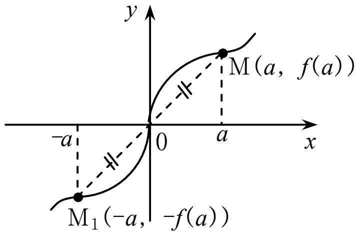
$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$$

따라서 주어진 함수는 짝함수도 홀함수도 아니다.

짝함수의 그라프는 y축에 관하여 대칭이다.



홀함수의 그라프는 원점에 관하여 대칭이다.



상 식

우리 나라의 첫 수학박사
리재곤(1919-2007)

그는 일제식민지통치시기 대학에 갈수가 없어서 자습으로 현대수학을 습득하였다. 그는 위대한 수령님의 품속에서 **김일성**종합대학에서 학부장사업을 하였고 물리수학연구소 소장사업도 하였다. 그는 편미분방정식론, 함수론, 대수학 등 여러 분야의 연구사업을 하였으며 수많은 수학자들을 키워냈다.

리재곤의 연구사업에서 제일 큰것은 다차원특이적분의 성질을 해명하고 고계타원형련립편미분방정식의 경계값문제를 해결한것이다. 그는 보통교육부문의 수학교과서 현대화에도 기여하였고 수학말을 과학화하고 바로잡는데서 커다란 성과를 거두었다. 그밖에 수학의 본질과 과업을 밝히는데도 기여하였다.

위대한 장군님의 크나큰 배려로 리재곤은 원사, 교수 박사, 인민과학자로 되였다.

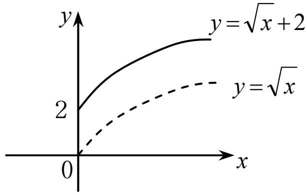
5. 함수의 그라프변환

[평행이동]

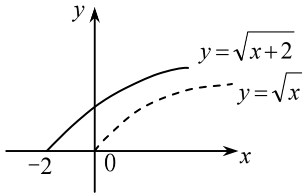
○ 함수 $y=f(x)+n$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동하여 얻는다.

○ 함수 $y=f(x-m)$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동하여 얻는다.

[례] $y=\sqrt{x}+2$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 얻어진다.



[례] $y=\sqrt{x+2}$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 x축의 정방향으로 −2만큼 평행이동하면 얻어진다.



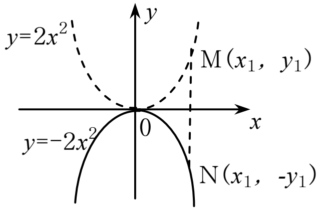
○ 함수 $y=f(x-m)+n$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동한 다음 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동하여 얻는다.

[대칭이동]

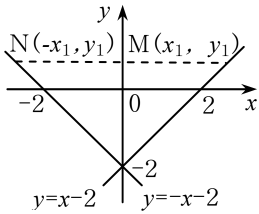
○ 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=-f(x)$ 의 그라프를 얻는다.

○ 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=f(-x)$ 의 그라프를 얻는다.

[례] 함수 $y=2x^2$ 의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 $y=-2x^2$ 의 그라프를 얻을수 있다.



[례] 함수 $y=x-2$ 의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 $y=-x-2$ 의 그라프가 얻어진다.



○ 함수 $y=f(x)$의 그라프를 원점에 관하여 대칭이동하면 $y=-f(-x)$ 의 그라프를 얻는다.

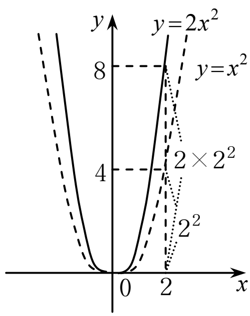
[례] 함수 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 의 그라프로부터 함수 $y=-(-x)^{\frac{1}{2}}$ 의 그라프를 단번에 얻자면 원점에 관하여 대칭이동하면 된다.

[확대와 축소]

$a>0$ 일 때 $y=f(x)$ 의 그라프를 y 축방향으로 a 배 확대(또는 축소)하면 $y=af(x)$의 그라프를 얻는다.

[례] 함수 $y=x^2$ 의 그라프로부터 함수 $y=2x^2$ 의 그라프를 그려보아라.

풀이. x 의 같은 값에 대응하는 $y=2x^2$ 의 값은 $y=x^2$ 의 값의 2배이다.
그러므로 $y=2x^2$ 의 그라프는 $y=x^2$ 의 그라프의 매개 점의 y 자리표를 2배 확대해서 얻은 점들로 이루어진다.



6. 분수함수와 무리함수, 제곱함수

[분수함수]

분수식으로 표시되는 함수를 **분수함수**라고 부른다.

［례］ 다음 분수함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\frac{2}{x-1}$ 　　　 2) $y=\frac{x}{x+3}$

풀이. 1) $y=\frac{2}{x-1}$

$x-1\neq 0$ 즉 $x\neq 1$

따라서 $y=\frac{2}{x-1}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ 1)\cup(1,+\infty)$

2) $y=\frac{x}{x+3}$

$x+3\neq 0$ 즉 $x\neq -3$

따라서 $y=\frac{x}{x+3}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$

— **분수함수의 그라프**

○ $y=\frac{a}{x-m}+n$ (a, m, n은 상수, $a\neq 0$) 모양으로 표시되는 함수의 그라프는 쌍곡선이며 함수 $y=\frac{1}{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

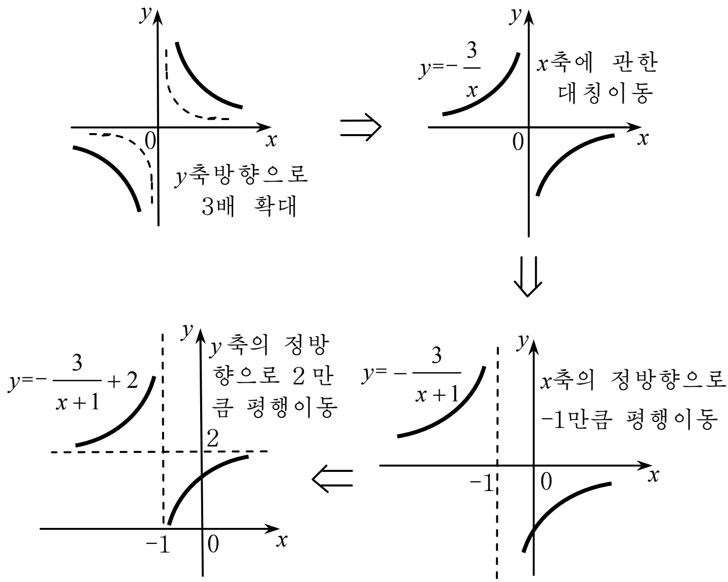
［례］ $y=\frac{2x-1}{x+1}$ 의 그라프를 그려라.

풀이. 분수식을 변형하면

$$y=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}=\frac{2\left(x+1-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$$

$y=\frac{1}{x}$ 을 $\frac{1}{x}\rightarrow\frac{3}{x}\rightarrow-\frac{3}{x}\rightarrow-\frac{3}{x+1}\rightarrow-\frac{3}{x+1}+2$

와 같이 변환하면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 하면 된다.



○ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d는 상수, $c\neq 0$, $bc-ad\neq 0$) 모양의 분수함수의 그라프는 쌍곡선이며 다 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다. 즉

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{cx+d}\cdot\frac{1}{c}=m+\frac{n}{cx+d}$$

여기서 $m=\dfrac{a}{c}$, $n=\dfrac{bc-ad}{c}$ 이므로 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그라프를 x축의 정방향으로 $-\dfrac{d}{c}$만큼 평행이동하고 n배 한 다음 y축의 정방향으로 m만큼 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 그라프를 얻는다.

[무리함수]

무리식으로 표시되는 함수를 **무리함수**라고 부른다.

［례］ 다음 무리함수의 뜻구역을 구하여라.

1） $y=\sqrt{x+7}$　　　2） $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}+x$

풀이. 1） $y=\sqrt{x+7}$

$x+7\geq 0$ 즉 $x\geq -7$

따라서 $y=\sqrt{x+7}$ 의 뜻구역은 $[-7,\ +\infty)$

2） $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}+x$

분모가 0이 되지 말아야 하므로 $x+3>0$

즉 $x>-3$

따라서 $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}+x$ 의 뜻구역은 $(-3,\ +\infty)$

― **무리함수의 그라프**

$y=a\sqrt{x-m}+n(a\neq 0)$ 모양의 무리함수의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

［례］ $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 어떻게 변환하면 $y=-\sqrt{2-4x}+3$ 의 그라프를 얻겠는가?

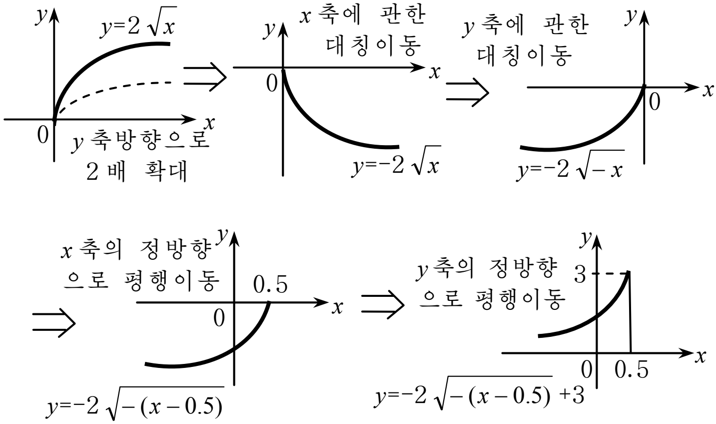
풀이. $y=-\sqrt{2-4x}+3=-\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$

$=-2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$

$y=\sqrt{x}$ 을 $\sqrt{x}\rightarrow 2\sqrt{x}\rightarrow -2\sqrt{x}\rightarrow -2\sqrt{-x}\rightarrow$

$\rightarrow -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\rightarrow -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$

과 같이 변환하면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 하면 된다.

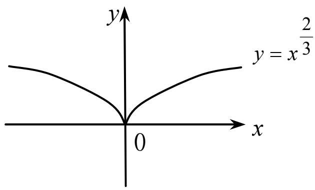


[제곱함수]

$y=x^{\alpha}$ 로 표시되는 함수를 **제곱함수**라고 부른다.

제곱함수에서는 지수가 어떤 수인가에 따라 그의 뜻구역이 달라진다.

[례] 함수 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 의 그라프는 그림과 같다.



7. 지수함수와 로그함수

[지수함수]

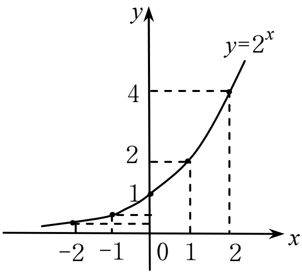
a가 1이 아닌 정수일 때 $f(x)=a^{x}$ 으로 표시되는 함수를 **지수함수**라고 부른다.

[례] 지수함수 $f(x)=2^{x}$ 의 그라프를 그려라.

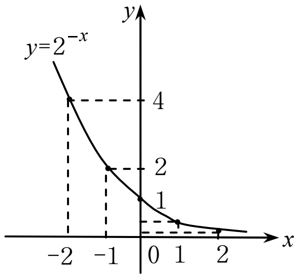
풀이. x의 값에 따르는 2^{x} 의 값을 표로 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
2^x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\cdots$

이 표에 의하여 그라프를 그리면 그림 ㄱ)와 같다.



ㄱ)



ㄴ)

[례] 지수함수 $f(x)=2^{-x}$의 그라프를 그려라.

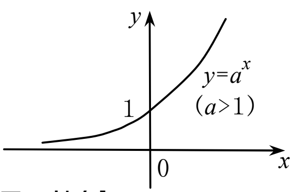
풀이. 지수함수 $f(x)=2^{-x}$의 그라프는 지수함수 $f(x)=2^x$의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하여 얻을 수 있다. (그림 ㄴ))

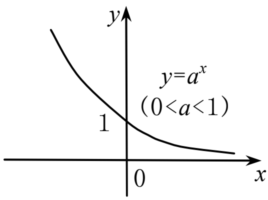
— **지수함수 $f(x)=a^x$의 성질**

① 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$, 값구역은 $(0, +\infty)$이다.

② $x=0$일 때 함수값은 $y=1$이다.

③ $a>1$일 때 증가함수이고 $0<a<1$일 때 감소함수이다.





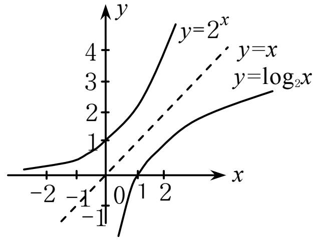
[로그함수]

지수함수 $f(x)=a^x$의 거꿀함수 $y=\log_a x$ $(a\neq1,\ a>0)$를 **로그함수**라고 부른다.

로그함수의 그라프는 지수함수 $f(x)=a^x$ 의 그라프와 직선 $y=x$에 관하여 대칭이다.

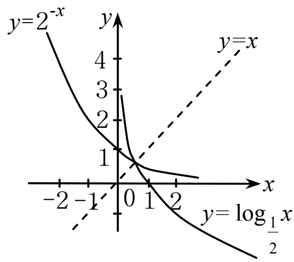
[례] 로그함수 $y=\log_2 x$ 의 그라프를 그려라.

풀이. 지수함수 $y=2^x$ 의 그라프로부터 $y=\log_2 x$ 의 그라프를 그리면 그림과 같다.



[례] 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그라프를 그려라.

풀이. 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그라프로부터 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그라프를 그리면 그림과 같다.

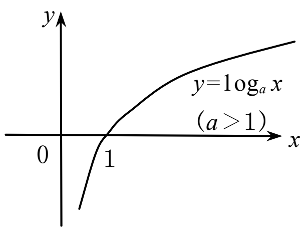


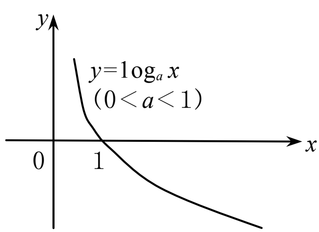
— **로그함수의 성질**

① 뜻구역은 (0, +∞)이고 값구역은 (−∞, +∞)이다.

② $x=1$일 때 함수값은 $y=0$이다.

③ $a>1$일 때 증가함수이고 $0<a<1$일 때 감소함수이다.



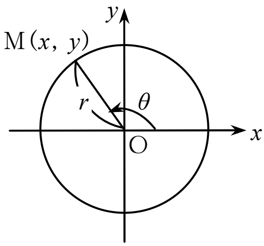


8. 삼각함수와 거꿀삼각함수

[삼각함수]

그림은 회전하는 반경 OM이 x 축으로부터 각 θ 만큼 회전한것을 보여주고있다.

반경의 끝점 M의 자리표를 $M(x,\ y)$, $OM=r$ 라고 할 때 주어진 각 θ에 삼각비 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$가 대응한다.



각 θ에 비 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$를 대응시키는 함수를 각각 **시누스함수**, **코시누스함수**, **탕겐스함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

또한 각 θ에 비 $\frac{x}{y}$, $\frac{r}{x}$, $\frac{r}{y}$를 대응시키는 함수를 각각 **코탕겐스함수**, **세칸스함수**, **코세칸스함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\cot\theta=\frac{y}{x},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \mathrm{cosec}\,\theta=\frac{r}{y}$$

이 함수들을 통털어서 **삼각함수**라고 부른다.

삼각함수에서 각을 변수 x로 표시하면 삼각함수 $y=f(x)$들은 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\mathrm{cosec}\,x$로 표시할수 있다.

우에서 지적된 삼각함수들의 합, 차, 적, 상, 제곱 등도 역시 삼각함수이다.

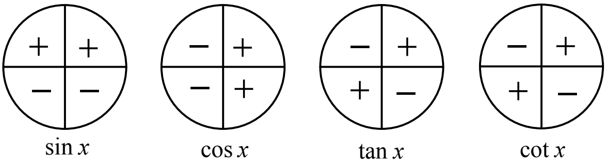
［례］ $y=3\cos x-2\sin x$, $y=\tan^2 x+\cos 2x$,

$y=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$, $y=\dfrac{2\tan x}{1+\tan x}$

들은 다 삼각함수이다.

— 삼각함수값의 부호

매 분구에서 $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ 의 부호는 그림과 같다.



［례］ $\sin 573°$, $\cos\left(-\dfrac{7}{3}\pi\right)$의 부호를 말하여라.

풀이. $573°=213°+360°$이므로 이 각의 끝변은 3사분구에 놓인다.

따라서 $\sin 573°$ 의 부호는 −이다.

$-\dfrac{7}{3}\pi=-\dfrac{\pi}{3}-2\pi$ 이므로 이 각의 끝변은 4사분구에 놓인다.

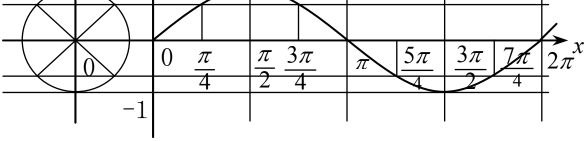
따라서 $\cos\left(-\dfrac{7}{3}\pi\right)$의 부호는 +이다.

［주기함수］

변수 x 의 임의의 값에 대하여 정수 ℓ 이 있어서 $f(x\pm\ell)=f(x)$ 이면 함수 $f(x)$ 를 **주기함수**, ℓ 을 **주기**라고 부른다.

보통 주기 ℓ 은 웃식에 맞는 가장 작은 수를 택한다.

— **함수** $y=\sin x$ **의 그라프**



— **함수 $y=\sin x$의 그라프의 특징**

① $y=\pm 1$사이에 있다.

② 점 $x=k\pi\ (k\in Z)$에서 x축과 사귄다.

③ 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$에서 오른다.

④ 구간 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$에서 내린다.

⑤ 원점 O에 관하여 대칭이다.

⑥ 2π를 주기로 하여 되풀이된다.

— **함수 $y=\sin x$의 성질**

① 뜻구역 $(-\infty,\ +\infty)$, 값구역 $[-1,\ 1]$

② $x=k\pi\ (k\in Z)$일 때 함수값은 0이다.

③ 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$에서 함수는 증가한다.

④ 구간 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$에서 감소한다.

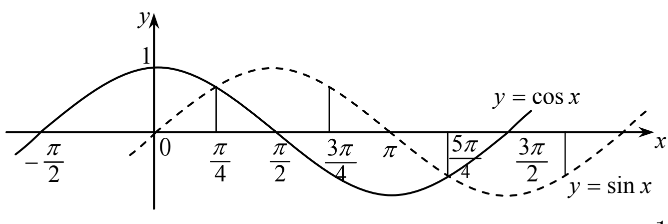
⑤ $y=\sin x$는 홀함수이다. 즉

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad x\in R$$

⑥ $y=\sin x$는 주기함수이다.(주기는 2π이다.)

— **함수 $y=\cos x$의 그라프**

$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$이다. $y=\cos x$의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프를 x축의 부의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하여 얻을수 있다.



— **함수 $y=\cos x$의 그라프의 특징**

① 직선 $y=\pm1$사이에 있다.

② 점 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$에서 x축과 사귄다. ($k\in Z$)

③ 구간 $[2k\pi,\ \pi+2k\pi]$에서 내린다.

④ 구간 $[\pi+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi]$에서 오른다.

⑤ y축에 관하여 대칭이다.

⑥ 2π를 주기로 하여 되풀이된다.

— **함수 $y=\cos x$의 성질**

① 뜻구역 $(-\infty,\ +\infty)$, 값구역 $[-1,\ 1]$

② $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in Z$)일 때 함수값은 0이다.

③ 구간 $(\pi+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi)$에서 함수는 증가한다.

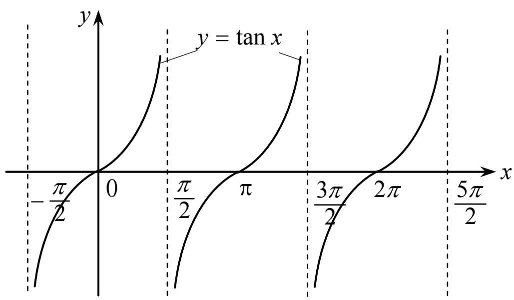
④ 구간 $(2k\pi,\ \pi+2k\pi)$에서 함수는 감소한다.

⑤ $y=\cos x$는 짝함수이다. 즉

$$\cos(-x)=\cos x,\quad x\in R$$

⑥ $y=\cos x$는 주기함수이다. (주기는 2π이다.)

— **함수 $y=\tan x$의 그라프**



— **함수 $y=\tan x$의 그라프의 특징**

① 점 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$에서 우아래로 한없이 뻗는다. ($k\in Z$)

② 점 $x=k\pi$에서 x축과 사귄다.

③ 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$에서 오른다.

④ 원점 O에 관하여 대칭이다.

⑤ π를 주기로 하여 되풀이된다.

— **함수 $y=\tan x$의 성질**

① $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)$일 때 뜻을 가지지 않는다.

② $x=k\pi$일 때 함수값이 0이다.

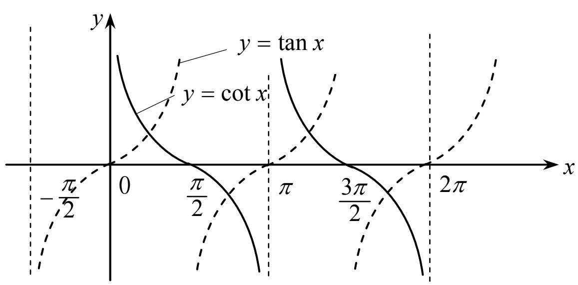
③ 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$에서 증가한다.

④ 그라프는 원점 O에 관하여 대칭이다. 즉 $y=\tan x$는 홀함수이다.

⑤ π를 주기로 하는 주기함수이다.

— **함수 $y=\cot x$의 그라프**

$y=\cot x=-\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $y=\cot x$의 그라프는 $y=\tan x$의 그라프를 x축방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 다음 y축에 관하여 축대칭이동하면 얻어진다.



― **함수 $y=\cot x$의 그라프의 특징**

① 점 $x=k\pi$에서 아래우로 한없이 뻗는다.$(k\in Z)$

② 점 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 에서 x축과 사귄다.

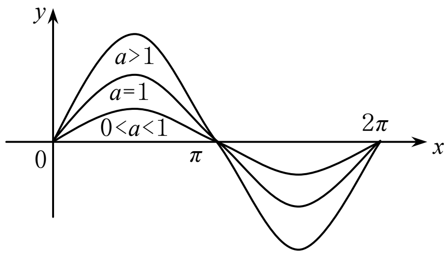
③ 구간 $(k\pi, (k+1)\pi)$에서 내린다.

④ 원점 O에 관하여 대칭이다.

⑤ π를 주기로 하여 되풀이된다.

― **함수 $y=a\sin x$ 의 그라프**

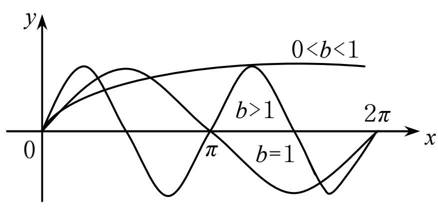
① $a>0$ 인 경우에는 $y=a\sin x$ 의 그라프를 y 축방향으로의 확대($a>1$), 축소$(0<a<1)$ 변환을 하여 얻는다.



② $a<0$인 경우에는 $y=|a|\sin x$ 의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하여 얻는다.

― **함수 $y=\sin bx$ 의 그라프**

① $b>0$인 경우에는 $y=\sin x$ 의 그라프를 x축방향으로의 확대$(0<b<1)$, 축소$(b>1)$ 변환을 하여 얻는다.



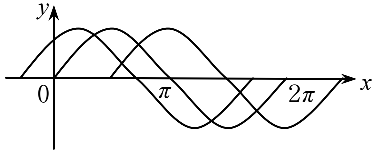
② $b<0$ 인 경우에 $y=\sin|b|x$ 의 그라프를 y 축에 관하여 대칭이동하여 얻는다.

— **함수 $y=\sin(x+c)$의 그라프**

$y=\sin x$ 의 그라프를 x 축방향으로 $|c|$만큼 평행이동하여 얻는다. 이때

$c>0$： x축의 부방향

$c<0$： x축의 정방향

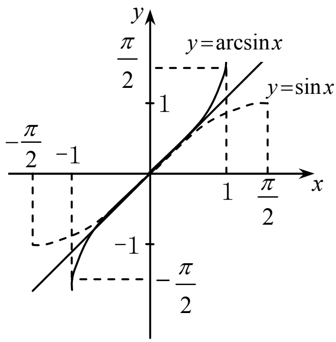


[거꿀시누스함수]

$$\left.\begin{array}{l}\sin x=m\\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=\arcsin m$$
《아크시누스 m》

함수 $y=\sin x$ 의 거꿀함수 $y=\arcsin x$ 를 **거꿀시누스함수**라고 부른다.

함수 $y=\arcsin x$ 의 그라프는 함수 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 의 그라프를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.



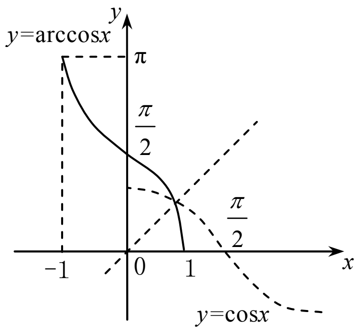
[거꿀코시누스함수]

$$\left.\begin{array}{l}\cos x=m\\ 0\le x\le\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow x=\arccos m$$
《아크코시누스 m》

함수 $y=\arccos x$는 $y=\cos x$의 거꿀함수이다.

함수 $y=\arccos x$ 를 **거꿀코시누스함수**라고 부른다.

함수 $y=\arccos x$ 의 그라프는 $y=\cos x(0\le x\le\pi)$ 의 그라프를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.



[거꿀탕겐스함수]

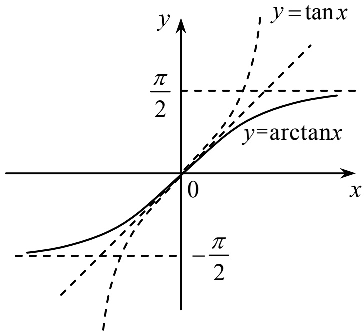
$$\left.\begin{array}{l}\tan x = m \\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \arctan m$$

《아크탕겐스 m》

함수 $y = \tan x$ 는 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가하므로 거꿀함수를 가진다.

그것을 구하면

$$y = \arctan x\left(-\infty < x < +\infty,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$



마찬가지 방법으로 함수 $y=\cot x$ 의 거꿀함수 $y=\operatorname{arccot} x$ 도 이끌어낼수 있다.

거꿀탕겐스함수 $y=\arctan x(-\infty < x < +\infty)$ 의 그라프는 $y = \tan x\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 의 그라프를 직선 $y = x$ 에 관하여 대칭이동하여 얻을수 있다.

제4장. 방정식과 안같기식

1. 같기식과 안같기식

[같기식]

두 식을 같기기호로 이어서 만든 식을 **같기식**이라고 부른다.

［례］ $2ab = 3x + 3$, $3x + 7 = 5a + b$

— **같기식의 성질**

A, B가 셈식이고 A＝B라고 할 때

① A＋C＝B＋C(C：셈식)

② A－C＝B－C(C：셈식)

③ AC＝BC(C：셈식)

④ $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ （$C \neq 0$）

[늘같기식]

변수의 임의의 값에 대하여 늘 성립하는 같기식을 **늘같기식**이라고 부른다.

［례］ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $x + 4 = 4 + x$

— **늘같기식의 증명**

늘같기식의 어느 한 변 또는 두 변을 각각 변형하여 같기식이 된다는것을 밝히거나 어느 한 변을 다른 변으로 옮겨서 변형한것이 령이 된다는것을 밝히는것을 말한다.

[방정식]

변수가 든 같기식을 그 변수에 관한 **방정식**이라고 부른다.

방정식은 변수의 개수와 차수에 따라 다음과 같이 분류한다.

변수가 하나이고 차수가 1차이면 한변수1차방정식
변수가 하나이고 차수가 2차이면 한변수2차방정식
변수가 둘이고 차수가 1차이면 두변수1차방정식
… … … … … … …

[방정식의 변형]

방정식을 겉모양은 다르나 그것과 같은 풀이모임을 가지는 방정식으로 고치는것을 **방정식을 변형**한다고 말한다.

① 방정식의 두 변을 서로 바꾸는것
② 방정식의 각 변을 변형하는것
③ 방정식의 두 변에 같은 수나 셈식을 동시에 더하거나 더는것
④ 방정식의 두 변에 동시에 0이 아닌 같은 수나 셈식을 곱하거나 두 변을 동시에 0이 아닌 같은 수나 셈식으로 나누는것

방정식에 맞는 변수의 값들의 렬을 그 **방정식의 풀이**라고 부른다.

풀이를 다 구하거나 맞는 풀이가 없다는것을 밝히는것을 **방정식을 푼다**고 말한다. 즉 방정식의 풀이모임(방정식의 풀이들의 모임)을 구하는것을 방정식을 푼다고 말한다.

[례] $2x-8=0$

$x=4$ 일 때 $2\cdot4-8=0$ 이므로 4는 방정식 $2x-8=0$ 의 풀이이다.

갈기식의 성질을 써서 방정식을 고쳐갈 때 그것의 풀이는 달라지지 않는다.

방정식을 풀려면 갈기식의 성질을 써서 그 방정식을 $x=a$ 모양의 방정식으로 고치면 된다.

이때 a가 주어진 방정식의 풀이이다.

[동등한 방정식]

한 방정식이 다른 방정식을 변형하여 얻어진다면 이 두 방정식은 서로 **동등한 방정식**이라고 부른다.

— **방정식을 세워서 응용문제를 푸는 순서**

① 구하려는 량(또는 아직 정해지지 못한 량)을 글자로 표시한다.

② 문제에서 서로 련관되는 필요한 량들을 식으로 표시하고 문제조건에 맞는 방정식을 세운다.

③ 방정식을 푼다.

④ 풀이가 문제의 뜻에 맞는가를 따져본다.

⑤ 구하려는 답을 쓴다.

상 식

3차방정식의 풀이공식을 찾은 타르타글리아(1500－1557, 이딸리아)

1512년 프랑스군대가 이딸리아에 쳐들어와 어느 한 교회당에 피신한 사람들을 칼탕쳐 죽이였다. 여기서 구사일생으로 살아난 타르타글리아는 말을 더듬게 되였다.

그는 어려서 수학책 한권을 얻어 자습으로 공부하였고 후에 베니스대학의 교수로 되였다. 종이 살 돈이 없는 그는 석판에 글도 쓰고 계산도 하면서 수학공부를 하였다.

그는 천성적으로 총명하였으며 공부를 몹시 하고싶어하였다고 한다. 그의 가장 큰 공적은 3차방정식의 풀이공식을 찾은것이다.

[안갈기식]

두 식을 안갈기기호로 이어놓은것을 **안갈기식**이라고 부른다.

안갈기식은 변수의 개수와 차수에 따라 다음과 같이 분류한다.

변수가 하나이고 차수가 1차이면 **한변수1차안같기식**,
변수가 하나이고 차수가 2차이면 **한변수2차안같기식**,
변수가 둘이고 차수가 1차이면 **두변수1차안같기식**
… … … … … … … … … … … … …

안같기식에 맞는 변수의 값을 그 **안같기식의 풀이**라고 부른다.

안같기식의 풀이를 다 구하거나 풀이가 없다는것을 밝히는것을 안같기식을 푼다고 말한다. 즉 안같기식의 풀이모임을 구하는것을 안같기식을 푼다고 말한다.

[안같기식의 변형]

안같기식을 겉모양은 다르나 그것과 같은 풀이모임을 가지는 안같기식으로 고치는것을 **안같기식을변형**한다고 말한다.

① 두 변을 바꾸면서 안같기기호의 방향을 바꾸는것

② 두 변을 변형하는것

③ 두 변에 같은 수나 셈식을 동시에 더하거나 더는것

④ 두 변에 안같기식의 뜻구역에서 정수값을 가지는 같은 식을 곱하는것

⑤ 두 변에 안같기식의 뜻구역에서 부수값을 가지는 같기식을 곱하면서 안같기기호의 방향을 바꾸는것

※ 두 변을 2제곱하는것, 두 변에 같은 식을 곱하는것은 변형이 아니다.

[동등한 안같기식]

한 안같기식이 다른 안같기식을 변형하여 얻어진다면 이 두 안같기식은 **동등한 안같기식**이라고 부른다.

– **안같기식의 성질**

$A<B$일 때 A, B: 셈식

① $A+C<B+C$

② $A-C<B-C$(C: 셈식)

③ $m>0$ 이면 $mA<mB$, $\frac{A}{m}<\frac{B}{m}$

$m<0$ 이면 $mA>mB$, $\frac{A}{m}>\frac{B}{m}$

상 식

갈기기호와 안갈기기호의 유래

갈기기호 《＝》는 영국의 수학자 레코드(1510-1558)가 처음으로 사용하였다. 그는 자기가 알고있는것가운데서 가장 비슷한 두 물건이 한쌍의 평행직선모양이였으므로 이 두 선으로 같다는것을 표시해야 한다고 제기하였다고 한다. 그러나 17세기경에 이르러서야 수학자들이 그것을 인정하고 사용하여왔다.

안갈기기호 《＞》, 《＜》는 영국의 수학자 하리오트(1560-1612)가 1612년에 처음으로 사용하였다. 기호 《＞》, 《＜》에는 벌어진쪽이 좁아진쪽보다 크다는 뜻이 담겨져있다. 그후에 기호 《＝》와 《＞》, 《＜》가 결합된 《≧》, 《≦》가 사용되였다. 수학에서 갈기기호, 안갈기기호를 사용하여 량들사이의 크기관계를 간편하게 표현하게 됨으로써 과학기술발전에 크게 도움을 주었다.

2. 1차방정식과 1차안갈기식

[1차방정식]

변수가 들어있는 마디의 차수가 1인 방정식을 **1차방정식**이라고 부른다.

［례］ $2x-3=5$, $ax+b=0$

— **1차방정식의 풀이**

○ **1차방정식 $ax+b=0$ 의 대수적풀이**

방정식을 변형하여 $x=c$ 와 같은 형태로 고치는 방법으로 푼다.

［례］ $ax+b=0$

$ax=-b$

$x=-\dfrac{b}{a}$

이때 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 $x = -\frac{b}{a}$

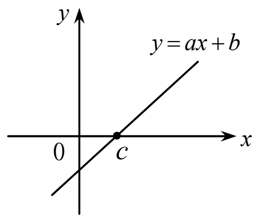
$b = 0$ 이면 $x = 0$

$a = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 풀이는 없고

$a = 0$ 이고 $b = 0$ 이면 임의의 수가 풀이로 된다.

○ **1차방정식 $ax + b = 0$ 의 그라프적풀이**

방정식 $ax+b=0$ 의 풀이는 $y=ax+b$ 의 그라프가 x 축과 사귀는 점의 x 자리표를 구하는 방법으로 찾을수 있다.



실례로 그림에서 $ax + b = 0$ 의 풀이는 $x = c$ 이다.

○ **1차방정식 $ax + b = cx + d$ 의 풀이**

$y = ax + b$ 와 $y = cx + d$ 의 그라프가 사귀는 점의 x 자리표와 같다.

상식

갈롸리론의 창시자, 어린 수학자
갈롸(1811-1832, 프랑스)

갈롸는 12살까지 어머니가 직접 교육하였다. 그는 주로 시문학에 몰두하였다. 갈롸는 중학교에 입학하여 시문학으로부터 수학에로 극적인 방향전환을 하였다. 그는 중학교시절에 련분수에 관한 론문을 썼다. 이때 5차방정식의 대수적풀이에 《성공》하였지만 자체로 오유를 발견하고 대수방정식이 뿌리기호로 풀리기 위한 조건을 찾아내였다.

갈롸는 16살에 론문을 바탕으로 하는 유명한 갈롸리론을 내놓았다. 그러나 갈롸의 론문은 천대를 받았다. 리해하기도 힘들었지만 풋내기로 보였던것이다.

갈롸는 결투끝에 사망하였는데 그가 사망한지 14년만에 그의 론문이 수학잡지에 발표되였다. 빠리과학원에서는 60페지짜리 《갈롸전집》을 출판하면서 수학박사의 학위를 수여하였다.

[련립방정식]

몇개의 방정식을 묶은것을 **련립방정식**이라고 부른다.

련립방정식에 서로 다른 변수가 2개 들어있고 매 방정식이 1차방정식일 때 그 련립방정식을 **련립두변수1차방정식**이라고 부른다.

련립두변수1차방정식의 일반모양(변수는 x, y)

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p \\ a_2x+b_2y=q \end{cases}$$

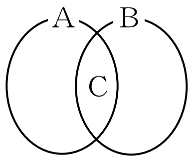
［례］ $\begin{cases} x+y=29 \\ 4x+2y=64 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x=2 \\ 7x-2y=3 \end{cases}$

련립방정식에 서로 다른 변수가 3개(n개) 들어있고 매 방정식의 차수가 1일 때 그 련립방정식을 **련립세변수(n변수)1차방정식**이라고 부른다.

— **련립방정식의 풀이**

련립방정식의 매 방정식에 다 맞는 공통풀이를 그 **련립방정식의 풀이**라고 부른다.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=p & ① \\ a_2x+b_2y=q & ② \end{cases}$$



A: ①의 풀이모임

B: ②의 풀이모임

C＝A∩B: 련립방정식의 풀이모임

련립방정식의 풀이모임을 구하는것을 련립방정식을 푼다고 말한다.

— **련립두변수1차방정식의 풀이법**

○ **갈아넣기법**

련립두변수1차방정식은 거기에 들어있는 어느 한 방정식이 한변수1차방정식으로 되도록 변형하여 푼다.

한 변수를 다른 변수에 관한 식으로 표시하고 갈아넣으면서 련립방정식을 푸는 방법을 **갈아넣기법**이라고 부른다.

[례] $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ 을 갈아넣기법으로 풀어라.

풀이. $\begin{cases} x-y=2 & ① \\ 2x-3y=3 & ② \end{cases}$

①에서 변수 x를 y에 관한 1차식으로 표시하면

$$x=2+y \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$2(2+y)-3y=3$$

$$y=1$$

이것을 ③에 갈아넣으면

$$x=3$$

∴ 풀이모임 $\{(3, 1)\}$

○ **더덜기법**

련립방정식에 들어있는 두 변을 변끼리 더하거나 덜어서 한변수1차방정식을 얻어내면 그것을 쉽게 풀수 있다.

두 방정식을 변끼리 더하거나 더는 방법으로 련립방정식을 푸는 방법을 **더덜기법**이라고 부른다.

[례] $\begin{cases} 3x-2y=-3 & ① \\ 5x+2y=11 & ② \end{cases}$

풀이. ①＋②

$$\begin{array}{rrcr} & 3x-2y & = & -3 \\ +) & 5x+2y & = & 11 \\ \hline & 8x & = & 8 \end{array}$$

$$x=1 \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$5\cdot1+2y=11$$

$$y=3$$

∴ 풀이모임 $\{(1, 3)\}$

○ **그라프에 의한 풀이법**

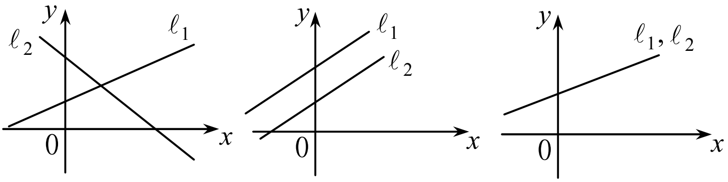
두변수방정식의 풀이를 자리표로 가지는 점전부의 모임을 이 **방정식의 그라프**라고 부른다.

두변수1차방정식의 그라프는 직선이다.

련립두변수1차방정식의 풀이는 매 방정식의 그라프들의 사귐점의 자리표이며 그 거꿀도 성립한다.

그러므로 련립두변수1차방정식의 풀이를 구하기 위해서는 매 방정식들의 그라프들의 사귐점을 찾아야 한다.

이때 그라프들이 한 점에서 사귀면 풀이는 1개, 그라프들이 평행이면 사귐점이 없으므로 풀이는 없는것이다. 그라프들이 겹치면 사귐점이 끝없이 많으므로 풀이는 끝없이 많은것으로 된다.



– **련립세변수1차방정식의 풀이법**

련립세변수1차방정식도 갈아넣기법, 더덜기법으로 푼다.

이때 한 변수를 갈아넣기법에 의하여 없애고 련립두변수1차방정식으로 이끌어간다.

[례] $\begin{cases} 3x-y+2z=11 & ① \\ x+2y-3z=0 & ② \\ z=5x+y & ③ \end{cases}$ 을 갈아넣기법으로 풀어라.

풀이. ③을 ①에 갈아넣으면

$$3x-y+2(5x+y)=11$$

$$13x+y=11 \qquad ①'$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$x+2y-3(5x+y)=0$$

$$x+2y-15x-3y=0$$

$$-14x-y=0$$

$$14x+y=0 \qquad ②'$$

②′ 에서 $y=-14x$ 를 ①′ 에 갈아넣으면

$$13x+(-14x)=11$$

$$-x=11$$

$$x=-11$$

이것을 ②′ 에 갈아넣으면

$$y=154$$

$x=-11$, $y=154$ 를 ③에 넣으면

$$z=5\cdot(-11)+154=-55+154=99$$

∴ 풀이모임은 {(−11, 154, 99)}

[례] $\begin{cases} 2x-3y+z=7 & ① \\ x+4y-z=6 & ② \\ 3x-2y+2z=14 & ③ \end{cases}$ 을 더덜기법으로 풀어라.

풀이. ①+②

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 2x & - & 3y & + & z & = & 7 \\ +) & x & + & 4y & - & z & = & 6 \\ \hline & 3x & + & y & & & = & 13 \end{array} \qquad ④$$

①×2−③

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 4x & - & 6y & + & 2z & = & 14 \\ -) & 3x & - & 2y & + & 2z & = & 14 \\ \hline & x & - & 4y & & & = & 0 \end{array} \qquad ⑤$$

④−⑤×3

$$\begin{array}{rrrrrl} & 3x & + & y & = & 13 \\ -) & 3x & - & 12y & = & 0 \\ \hline & & & 13y & = & 13 \end{array}$$

$$y=1 \qquad ⑥$$

⑥을 ⑤에 넣으면 $x=4$ ⑦

⑥, ⑦을 ①에 넣으면 $z=2$

∴ 풀이모임은 {(4, 1, 2)}

— **련립방정식을 세워서 문제를 푸는 방법**

① 구하려는 량들을 변수로 잡는다.

② 문제의 조건에 따라 변수의 개수만 한 방정식으로 된 련립방정식을 세운다.

③ 방정식을 푼다.

④ 구한 풀이가 문제의 조건에 맞는가를 보고 맞는것을 답으로 쓴다.

[1차안같기식]

변수가 든 마디의 차수가 다 1차인 안같기식을 **1차안같기식**이라고 부른다.

［례］ $ax-b>x+3$ ， $3x+2<x-3$, $2-4x>9+x$

— **1차안같기식의 풀이**

○ 1차안같기식 $ax>b,\ ax\le b$ 는 변형하여 다음과 같은 풀이를 얻는다.

	$ax>b$ 의 풀이	$ax\le b$ 의 풀이
$a>0$	$x>\dfrac{b}{a}$	$x\le\dfrac{b}{a}$
$a<0$	$x<\dfrac{b}{a}$	$x\ge\dfrac{b}{a}$
$a=0,\ b\ge 0$	없다	임의의 수

［례］ 안같기식

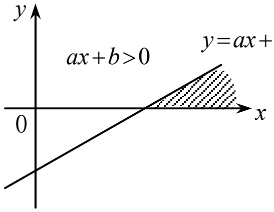
$$\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ge\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

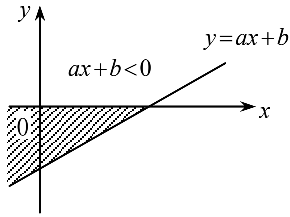
풀이. 먼저 왼변과 오른변에 분모들의 최소공통배수 6을 곱하면

$$2x+2\ge 3x+3$$
$$2x-3x\ge 3-2$$
$$-x\ge 1$$
$$x\le -1$$

풀이모임은 $(-\infty,\ -1]$

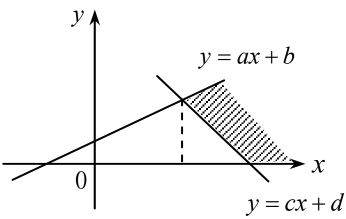
○ 안갈기식 $ax+b>0$ 의 풀이는 1차식 $y=ax+b$ 의 그라프가 x축의 웃쪽에 놓이는 x값의 구간이고 $ax+b<0$의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 x축의 아래쪽에 놓이는 x값의 구간이다.

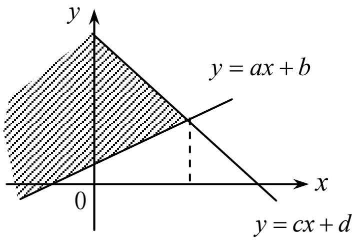




○ 안갈기식 $ax+b>cx+d$ 의 풀이는 1차식 $y=ax+b$ 의 그라프가 1차식 $y=cx+d$ 의 그라프의 웃쪽에 놓이는 x값의 구간이다.

마찬가지로 안갈기식 $ax+b<cx+d$ 의 풀이는 1차식 $y=ax+b$의 그라프가 1차식 $y=cx+d$의 그라프의 아래쪽에 놓이는 x값의 구간이다.





[련립안갈기식]

몇개의 안갈기식에 다 맞는 변수의 값들을 생각할 때에는 이 안갈기식들을 묶어놓는다. 이와 같이 안갈기식들을 묶은것을 **련립안갈기식**이라고 부른다.

련립안갈기식에 들어있는 안갈기식들이 같은 변수로 된 한변수1차안갈기식들이면 **련립한변수1차안갈기식**이라고 부른다.

련립안갈기식의 매 안갈기식에 다 맞는 변수의 값을 **련립안갈기식의 풀이**라고 부르며 련립안갈기식의 풀이모임을 구하는것을 **련립안갈기식을 푼다**고 말한다.

련립안갈기식을 풀 때에는 매 안갈기식을 풀고 풀이모임의 사귐을 구하면 된다.

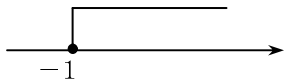
［례］ 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 7x+2\geq 5x & ① \\ -4x+1<22+3x & ② \end{cases}$$

①을 풀면

$2x\geq -2$

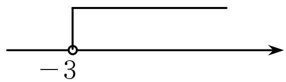
$x\geq -1$



②을 풀면

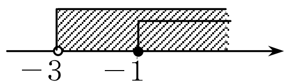
$-7x<21$

$x>-3$



①과 ②의 공통풀이

$x\geq -1$



∴ 풀이모임은 ［－1, ＋∞)

［례］ 다음 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x-4<2+x & ① \\ 2x+5<13 & ② \\ 8-x\leq 6 & ③ \end{cases}$$

풀이. ①을 풀면 $x<6$

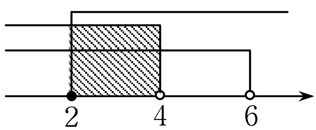
②을 풀면 $x<4$

③을 풀면 $x\geq 2$

공통풀이를 구하면

$2\leq x<4$

풀이모임 ［2, 4)



$\frac{a}{b}>0, \Leftrightarrow ab>0$, $\frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow ab<0$

$ab>0$, $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$

$ab<0$, $\frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$

［례］ 안같기식 $(x+5)(x-3)>0$ 을 풀어라.

① $\begin{cases} x+5>0 \\ x-3>0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+5<0 \\ x-3<0 \end{cases}$

①의 풀이모임 $(3, +\infty)$, ②의 풀이모임 $(-\infty, -5)$

∴ 풀이모임은 $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$

3. 2차방정식과 2차안같기식

[2차방정식]

a, b, c 가 상수이고 $a \neq 0$ 일 때

$$ax^2+bx+c=0$$

모양의 방정식을 **2차방정식**이라고 부른다.

［례］ $3x^2+5x+2=0$, $x^2=0$

－ **2차방정식의 풀이**

○ 방정식을 인수분해하여 푼다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$ 형태로 인수분해하여 $x_1=m$, $x_2=n$ 을 얻는다.

○ **2차방정식의 풀이공식**

$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} (b^2-4ac \geq 0)$ 에 의하여 푼다.

특히 $b=2k(k=1, 2, \cdots)$ 이면

$$x_{1,2}=\frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}$$

로 푼다.

○ 그라프적인 방법으로 푼다.

방정식 $ax^2+bx+c=0$ 은 함수 $y=ax^2+bx+c$ 에서 $y=0$ 인 경우이다. 그러므로 $ax^2+bx+c=0$ 의 풀이는 함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프인 포물선이 x 축과 사귀는 점의 x 자리표를 구하는 방법으로 찾을수 있다.

이때 사귐점이 없으면 실수풀이는 없는것이다.

― **판별식과 풀이사이의 관계**

2차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 의 풀이공식에서

$$\mathrm{D}=b^2-4ac$$

를 **판별식**이라고 부른다.

풀이공식으로부터 직접 다음 결과를 얻는다.

D＞0⇔ $x_1\neq x_2$ 인 실수풀이가 있다.

D＝0⇔ $x_1=x_2$ 인 실수풀이가 있다.(겹풀이)

D＜0⇔ 서로 공액인 허수풀이 $x_1,\ x_2$ 가 있다.

즉 $x_1=p+iq$, $x_2=p-iq$

［례］ $3x^2-5x+2=0$ 은 D＝ $(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1>0$ 이므로 서로 다른 실수풀이를 가진다.

$2x^2+5x+7=0$ 은 D＝ $(-2)^2-4\cdot1\cdot1=4-4=0$ 이므로 겹풀이 $x_1=x_2=1$ 을 가진다.

$x^2+2x+2=0$ 은 D＝ $2^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$ 이므로 서로 공액인 허수풀이를 가진다.

이때 $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$

— **2차방정식의 풀이와 결수사이의 관계**

2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, a, b, $c\in \mathrm{R}$의 두 풀이를 x_1, x_2라고 하면

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

이때 2차3마디식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

상 식

이름을 남긴 젊은 수학자
아벨(1802-1829, 노르웨이)

아벨의 가정은 대단히 빈궁하였다.

13살에 중학교에 들어간 아벨은 수학선생의 도움으로 고등수학의 초보를 습득한 다음 이름있는 수학자들의 책을 공부하였다.

아벨은 대학입학초기에 벌써 5차방정식의 풀이공식을 찾을 연구과제를 설정하였다.

그는 몇년동안 실패를 거듭하였지만 끝내 대학시절에 5차방정식의 대수적풀이법이 없다는것을 발견하고야말았다.

가우스는 이 론문을 받고 펼쳐보지도 않았던것 같다.

아벨은 비록 27살에 세상을 떠났지만 그는 수학에 지울수 없는 공적을 남기였다.

노르웨이정부는 아벨의 생일 200돐을 맞으며 노벨상에 대응한 수학분야의 국제상으로 아벨상을 제정할것을 발기하고 2 200만딸라의 금액을 기금하였다. 2003년에 아벨상이 수여되였는데 상금은 71만유로였다.

[겹2차방정식]

2차방정식에로 이끌어지는 방정식가운데서

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0)$$

모양의 방정식을 **겹2차방정식**이라고 부른다.

겹2차방정식은 보통 $x^2 = t$ 로 놓고 t 에 관한 2차방정식으로 고쳐서 푼다. 이때

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x = \pm\sqrt{t}$$

여기서 $t \geq 0$ 이면 x 의 값은 실수이며 $t < 0$ 이면 x 의 값은 허수이다.

［례］ $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

풀이. $x^2 = t$ 로 놓으면 방정식은

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0$$

$t_1 = 2,\ t_2 = 3$ 으로부터 $x^2 = 2,\ x^2 = 3$

따라서 $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,\,4} = \pm\sqrt{3}$

∴ 풀이모임은 $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

［례］ 방정식 $(x^2 - 3x)^2 - 16(x^2 - 3x) - 36 = 0$

풀이. $x^2 - 3x = t$ 로 놓으면 방정식은

$$t^2 - 16t - 36 = 0$$

$$(t-18)(t+2) = 0$$

$$t_1 = 18, \quad t_2 = -2$$

∴ $x^2 - 3x = 18$, $x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x - 18 = 0$ 을 풀면 $x_1 = 6$, $x_2 = -3$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ 을 풀면 $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

∴ 풀이모임은 $\{6,\ -3,\ 1,\ 2\}$

상식

당시 수학의 《왕》
가우스(1777-1855, 도이췰란드)

가우스는 당시 수학의 《왕》으로 불리웠다. 그의 집은 가난하였다. 가우스는 어려서부터 총명하였고 무엇이든지 다 알고싶어하였다. 어머니가 그를 안고 거리에 나갔다오면 그는 자기가 본 건물들과 지나온 다리를 차례로 꼽군 하였다고 한다. 그는 글자와 수자를 남한테서 배운 일이 없는 어린 나이에 글을 읽고 셈을 셀줄 알았다고 한다.

그는 3살 때 아버지가 계산하는데서 잘못을 발견하였는데 이정도로 계산을 잘하였다고 한다.

가우스는 81290+81495+…+100899를 한시간동안에 계산하라는 수학교원의 과제를 몇분만에 계산하여 수학교원을 놀라게 한 일도 있다. 가우스는 뉴톤의 2마디공식도 그것을 모르는 상태에서 자체로 발견하였다. 그는 대학시절에 최소2제곱법을 발견하였다. 그는 1796년 3월 30일 아침 잠에서 깨여나는 순간에 바른17각형을 자와 콤파스로 그리는것을 착상하였다. 그는 이 연구에 큰 의의를 부여하였다.

가우스는 전기간에 자기의 연구결과발표를 너무나 심중하게 하였다 한다.

어떤 학자는 이렇게 말하였다. 《가우스는 18세기말에 19세기 수학의 앞날을 환히 내다보고있었다. 만일 그가 자기의 모든 연구성과를 제때에 적어두었다가 발표하였더라면 세계수학은 적어도 50년분은 더 발전하였을것이다.》

그는 대학시절에 대수학의 기본정리(데카르트의 가설) 증명을 박사론문으로 제출하였다.

가우스는 수론을 중시하였는데 그것은 그의 《수학은 과학의 녀왕이고 수론은 수학의 녀왕이다.》라는 말로부터 알수 있다. 가우스는 부모에 대한 효성이 각별하였다고 한다. 어머니가 생의 마지막 4년을 소경으로 지냈는데 이때 극성스럽게 어머니를 돌봐드리였다고 한다.

가우스의 생일 225돐을 맞으며 수학의 응용에 관한 국제상으로 가우스상이 제정되였다.

[2차안같기식]

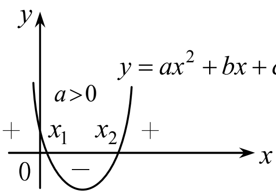
마디를 옮겨 정돈한것이 $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0) 또는 $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0)($a\neq 0$)모양으로 표시되는 안같기식을 **2차안같기식**이라고 부른다.

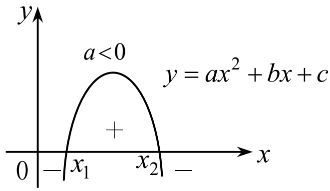
[례] $x^2+3x-2>0$, $x^2-3x\leq 0$, $x^2\geq 1$

— **2차안같기식의 풀이**

○ **2차안같기식** $ax^2+bx+c>0$ $(ax^2+bx+c<0)$ **의 그라프적 풀이**

2차안같기식 $ax^2+bx+c>0(ax^2+bx+c<0)$ 의 풀이모임은 함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프에서 x 축의 웃부분(아래부분)에 해당한 x값전부의 모임이다.





○ 인수분해하여 풀수 있다.

안같기식의 왼변을 인수분해하면

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\ (x_1<x_2)$$

$ax^2+bx+c>0$ 의 풀이모임은

$a>0$ 이면 $\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases}$

의 풀이모임과 같다. 즉 $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

$a<0$ 이면 $\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2>0 \end{cases}$

의 풀이모임과 같다. 즉 $(x_1,\ x_2)$

$ax^2+bx+c<0$ 의 풀이모임은

$a>0$ 이면 $(x_1,\ x_2)$

$a<0$ 이면 $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

$x_1=x_2$ 이면 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ 이므로 $(x-x_1)^2>0\ (x\neq x_1)$ 을 고려하면 풀이모임은 쉽게 찾을수 있다.

○ 판별식에 의하여 풀수 있다.

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 의 두 풀이를 $x_1,\ x_2\,(x_1\neq x_2)$

판별식을 $D=b^2-4ac$ 라고 하면

$$ax^2+bx+c>0$$

의 풀이모임은

$D>0$ 이면 $x_1<x_2$ 일 때

$a>0$ 이면 $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

$a<0$ 이면 $(x_1,\ x_2)$

$D=0$ 이면 $x_1=x_2$ 이므로

$a>0$ 이면 $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

$a<0$ 이면 ϕ

$D<0$ 이면

$a>0$ 일 때 $(-\infty,\ +\infty)$

$a<0$ 일 때 ϕ

$ax^2+bx+c<0$ 의 풀이모임도 같은 방법으로 고찰할수 있다.

[례] 함수 $y=x^2-2x-3$ 의 그라프를 그리면 x 축과 점 $-1,\ 3$에서 사귀면서 우로 뻗은 포물선을 얻는다. 이때 $-1<x<3$ 에서 $y<0$ 이고 나머지 구간 $x<-1,\ x>3$ 에서 $y>0$ 이다.

$\therefore\ x^2-2x-3>0$ 의 풀이모임은

$$(-\infty,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$$

［례］ 안갈기식 $2x^2-3x-2>0$ 을 풀어라.

풀이. $2x^2-3x-2=0$ 의 풀이를 구하면

$x_1=-\frac{1}{2}$， $x_2=2$ 이므로

$$2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

$$2x^2-3x-2>0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)>0$$

$\begin{cases} x+\frac{1}{2}>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ 을 풀면 $x>2$

$\begin{cases} x+\frac{1}{2}<0 \\ x-2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $x<-\frac{1}{2}$

∴ 풀이모임은 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup(2, +\infty)$

［례］ 안갈기식

① $x^2-x+1>0$ ② $x^2+x+1<0$ 에서

① $a=1>0$, $D=-3<0$ 이므로 임의의 x 값에 대하여 $x^2-x+1>0$

풀이모임은 $(-\infty, +\infty)$

② $a=1$, $D=-3<0$ 이므로 임의의 x 값에 대해서도 $x^2+x+1<0$ 이 성립할수 없다.

풀이모임은 ϕ

[련립두변수2차방정식]

련립두변수방정식에서 차수가 가장 높은것이 2차방정식일 때 이 련립방정식을 **련립두변수2차방정식**이라고 부른다.

［례］ $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x^2-3xy+3y^2=0 \\ 4x^2+9y^2=36 \end{cases}$

— **련립두변수2차방정식의 풀이법**

련립두변수2차방정식은 그 모양에 따라 풀이방법이 여러가지일수 있으나 갈아넣기법과 더덜기법에 기초하면서 인수분해의 방법으로 한 방정식이 1차방정식인 경우로 귀착시켜서 풀거나 특수방법을 적용하여 푼다.

［레］ 련립방정식

$$\begin{cases} x+y=3 & ① \\ x^2+y^2=5 & ② \end{cases}$$

①에서 y를 구하면

$$y=3-x \qquad ③$$

③을 ②에 갈아넣으면

$$x^2+(3-x)^2=5$$

이 방정식을 풀면

$$x_1=1, \quad x_2=2$$

이것을 ③에 갈아넣으면 $y_1=2, \quad y_2=1$

이리하여 두개의 풀이 (1, 2), (2, 1)을 얻는다.

∴ 풀이모임 {(1, 2), (2, 1)}

[절대값기호가 든 안같기식]

변수 또는 변수가 들어있는 식에 절대값기호가 들어있는 안같기식을 **절대값기호가 든 안같기식**이라고 부른다.

절대값기호가 든 안같기식은 절대값의 정의에 의하여 련립안같기식으로 고쳐서 푼다.

이때 다음 사실을 리용하면 편리할수 있다.

$$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

$$|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a \quad \text{또는} \quad x \ge a \ (a>0)$$

［레］ $|3x-2| \le 1$

$-1 \le 3x-2 \le 1$ 이므로

모든 변에 2를 더하면

$$1 \le 3x \le 3$$

모든 변을 3으로 나누면

$$\frac{1}{3} \le x \le 1$$

$\therefore$ 풀이모임 $\left[\frac{1}{3},\ 1\right]$

[고차안같기식]

$f(x)$ 가 x 에 관한 3차이상의 여러마디식일 때

$$f(x) > 0 \ (f(x) < 0)$$

모양으로 표시되는 안같기식을 **고차안같기식**이라고 부른다.

— 고차안같기식의 풀이

고차안같기식

$$f(x) > 0 \ (f(x) < 0)$$

은 $f(x)$ 를 인수분해한 다음 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 대강 그려 풀수 있거나 구간에서 함수의 부호를 따져 대수적으로 풀수 있다.

○ 그라프를 그리면서 풀이모임을 구하는 방법

한변수여러마디식 $f(x)$ 가 인수분해되였다고 하자. 이때 안같기식

$$f(x)>0 \ (f(x)<0)$$

의 풀이모임을 구하기 위하여

① 방정식 $f(x)=0$ 의 풀이를 수축에 표시한다.

② 가장 오른쪽에 놓인 점의 오른쪽에서 점을 향해 그라프를 그려나간다.

이때 가장 높은 차수의 결수가 정수이면 x 축의 웃쪽에서, 부수이면 x 축의 아래쪽에서 시작한다. 그리고 지수가 홀수인 인수에 해당한 점을 지날 때에는 x 축을 넘어서게 그리고 지수가 짝수인 인수에 해당한 점을 지날 때에는 x 축을 넘어서지 않게 그린다.

③ $y=f(x)$ 의 그라프가 x 축의 웃쪽(아래쪽)에 놓이는 x의 값구간을 구하면 이것이 풀이모임이다.

○ 구간에서 함수의 부호를 따지며 풀이모임을 구하는 방법

례를 들어 $2(x+1)(x-1)(x-4)>0$ 에서

$$f(x)=2(x+1)(x-1)(x-4)$$

로 놓고 $f(x)=0$ 의 풀이 －1, 1, 4를 경계로 하는 구간

(－∞, －1), (－1, 1), (1, 4), (4, ＋∞)

에서의 인수들과 $f(x)$ 값의 부호를 보면 표와 같다.

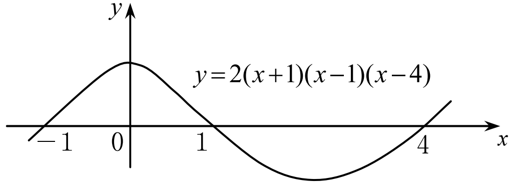
인수 / 구간	2	$x+1$	$x-1$	$x-4$	$f(x)$	비교
(－∞, －1)	＋	－	－	－	－	×
(－1, 1)	＋	＋	－	－	＋	○
(1, 4)	＋	＋	＋	－	－	×
(4, ＋∞)	＋	＋	＋	＋	＋	○

따라서 주어진 안같기식의 풀이모임은

(－1, 1), (4, ＋∞)

우의 표를 리용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 대강 그리면 그림과 같다.

그림에서 $y=f(x)$ 의 그라프가 x 축의 웃쪽에 놓이는 ($f(x)>0$인) x 값구간은 (－1, 1), (4, ＋∞)이다.



4. 분수방정식과 분수안같기식

[분수방정식]

분수식이 들어있는 방정식을 **분수방정식**이라고 부른다.

［례］ $\frac{x-4}{x-1}=\frac{x-1}{x}$

분수방정식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\frac{A}{B}=0$ 모양으로 고친 다음 약분하지 않고 푼다. 이때

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

이므로 A＝0, B≠0에 맞는 변수값을 구한다.

［례］ 분수방정식 $\frac{x-5}{x^2-1}+3=\frac{2}{1-x}$ 를 풀어라.

풀이. 오른변을 왼변으로 옮기고 통분하면

$$\frac{x-5+3(x^2-1)+2(x+1)}{x^2-1}=0$$

분자를 정돈하고 인수분해하면

$$\frac{3(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$$

이로부터

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+2)=0 & ① \\ x^2-1\neq 0 & ② \end{cases}$$

방정식 ①의 두 풀이 1, －2가운데서 1은 조건 ②에 맞지 않는다.

∴ 풀이모임은 {－2}

[분수안같기식]

분수식이 들어있는 안같기식을 **분수안같기식**이라고 부른다.

［례］ $2x^2+5x>\frac{3x+2}{27}$

분수안같기식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\frac{A}{B} \geq 0$(또는 >, <, ≤) 모양으로 고친 다음 푼다.

이때 $\frac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \end{cases}$

A 또는 B의 부호가 완전히 정해져있으면 풀이과정을 간략할수 있다.

［례］ 안같기식 $\frac{3-x}{x-2} < 0$의 왼변에 있는 분수식의 뜻구역이 조건 $x \neq 2$에 맞아야 한다. 이때 $(x-2)^2 > 0$이다.

안같기식의 두 변에 각각 $(x-2)^2$을 곱하면

$$(3-x)(x-2) < 0$$

이것을 풀면 풀이모임을 얻는다. 즉

$$(-\infty, \ 2) \cup (3, \ +\infty)$$

5. 무리방정식과 무리안같기식

[무리방정식]

무리식이 들어있는 방정식을 **무리방정식**이라고 부른다.

［례］ $\sqrt{x+1} = 5-x$, $\sqrt[3]{2x-9} = -3$

― 무리방정식을 풀 때에는 다음과 같이 한다.

① 뿌리기호를 없앤 다음에 푼다.

② 풀이가 주어진 방정식에 맞는가를 따져본다.

· $\frac{1}{2n}$ 제곱이 들어있을 때에는 끼여든 풀이가 있는가를 따져본다.

· $\frac{1}{2n+1}$ 제곱이 들어있을 때에는 주어진 방정식의 풀이로 된다.

［례］ $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$ 을 풀어라.

풀이. 왼변의 둘째 마디를 오른변으로 옮기면

$$\sqrt[3]{37+x}=1+\sqrt[3]{x}$$

두 변을 각각 3제곱하면

$$37+x=1+3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}+x$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-12=0$$

$$(\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt[3]{x}+4)=0$$

$$x=27, \quad x=-64$$

풀이모임 $\{27, -64\}$

[무리안같기식]

무리식이 들어있는 안같기식을 **무리안같기식**이라고 부른다.

무리안같기식을 정돈하면

$$\sqrt{A}<B \quad \text{또는} \quad \sqrt{A}>B$$

모양으로 고칠수 있다. 이때 다음과 같이 푼다.

$$\sqrt{A}<B \Leftrightarrow \begin{cases} A\geq 0 \\ B>0 \\ A<B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A}>B \Leftrightarrow \begin{cases} B<0 \\ A\geq 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} A>B^2 \\ B>0 \end{cases}$$

［례］ 안같기식 $\sqrt{25-x^2}>x+1$의 풀이모임은 다음과 같은 2개의 련립안같기식의 풀이모임의 합과 같다.

① $\begin{cases} 25-x^2\geq 0 \\ x+1<0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 25-x^2>(x+1)^2 \end{cases}$

①을 풀면 풀이모임은 $[-5, -1)$

②을 풀면 풀이모임은 $[-1, 3)$

∴ 주어진 안같기식의 풀이모임은

$$[-5, -1)\cup[-1, 3)=[-5, 3)$$

6. 지수방정식과 지수안같기식, 로그방정식과 로그안같기식

[지수방정식]

지수식이 들어있는 방정식을 **지수방정식**이라고 부른다.

［례］ $2^{x+1}=8$, $3^{x+1}+3^{x}=1$

지수방정식을 풀 때에는 다음의 명제들을 리용한다.

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad (a>0,\ a\neq 1) \ \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

$$a^{f(x)}=b^{f(x)} \quad (a,\ b>0,\ a,\ b\neq 1 \quad a\neq b) \quad \Leftrightarrow f(x)=0$$

［례］ 방정식 $3^{x-1}=\dfrac{1}{27}$을 풀어라.

풀이. $3^{x-1}=3^{-3}$

$x-1=-3$

$x=-2$

∴ 풀이모임 $\{-2\}$

[지수안같기식]

지수식이 들어있는 안같기식을 **지수안같기식**이라고 부른다.

［례］ $2^{x}>1$, $5^{x}>10^{x}$, $x^{x}>2^{x}$

지수안같기식을 풀 때 다음 명제들을 리용한다.

$$a^{f(x)}<a^{g(x)},\ a>1 \Rightarrow f(x)<g(x)$$

$$a^{f(x)}<a^{g(x)},\ 0<a<1 \Rightarrow f(x)>g(x)$$

$$a^{f(x)}<b^{f(x)} \quad a,\ b\neq 1,\ b>a>0 \Rightarrow f(x)>0$$

［례］ $2^{x}<0.25$를 풀어라.

풀이. $2^{x}<0.25 \Leftrightarrow 2^{x}<\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x}<2^{-2} \Leftrightarrow x<-2$

풀이모임 $(-\infty,\ -2)$

［례］ 안같기식 $3^{x+1}-3^{x}<54$를 풀어라.

풀이. $3^{x+1}-3^{x}<54 \Leftrightarrow 3^{x}(3-1)<54 \Leftrightarrow 3^{x}<3^{3} \Leftrightarrow x<3$

풀이모임 $(-\infty,\ 3)$

[로그방정식]

로그기호안에 변수가 들어있는 방정식 즉 로그식이 들어있는 방정식을 **로그방정식**이라고 부른다.

[례] $\log_2(x-3)=5$, $\log_3 x+\log_3(x-1)=1$, $\lg x^2+(\lg x)^2=0$

로그방정식을 풀 때에는 셈식을 정돈하여

$$\log_a \mathrm{A}=\log_a \mathrm{B} \quad \text{또는} \quad \log_a \mathrm{A}=b$$

모양으로 고쳐서 풀이를 구한다.

즉 로그의 정의와 성질을 써서 로그기호가 들어있지 않는 방정식으로 고쳐서 푼다. 이때 얻어진 풀이가운데서 로그방정식에 갈아넣어 0 또는 부수의 로그가 나타나게 되는것은 버려야 한다.

[례] 로그방정식 $\lg x+\lg(x+3)=1$을 풀어라.

풀이. $\lg x+\lg(x+3)=1$

$\lg x(x+3)=\lg 10$

$x(x+3)=10$

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$x=-5$, $x=2$

$x>0$, $x+3>0$이여야 하므로 $x=-5$는 버려야 한다.

따라서 $x=2$

∴ 풀이모임 $\{2\}$

[로그안같기식]

로그기호안에 변수가 들어있는 안같기식 즉 로그식이 들어있는 안같기식을 **로그안같기식**이라고 부른다.

로그안같기식을 풀 때에도 먼저 로그기호가 들어있지 않는 안같기식으로 고친다.

이때 다음의 성질을 리용한다.

$$\log_a \mathrm{A}<\log_a \mathrm{B} \Leftrightarrow 0<\mathrm{A}<\mathrm{B} \ (a>1)$$

$$\log_a \mathrm{A}<\log_a \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}>\mathrm{B}>0 \ (0<a<1)$$

［례］ 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

풀이. 로그의 의미로부터

$$x > 0,\quad x-1 > 0$$

그러므로 $x>1$인 값들가운데서 풀이를 찾아야 한다.

$$\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

$$\log_2 x(x-1) < \log_2 2$$

∴ $x(x-1) < 2$ 즉

$$x^2 - x - 2 < 0$$

이 안갈기식을 풀면 $-1 < x < 2$

$x > 1$이므로 $1 < x < 2$

풀이모임 $(1, 2)$

7. 삼각방정식

[삼각방정식]

삼각식이 들어있는 방정식을 **삼각방정식**이라고 부른다.

［례］ $\sin x - 1 = 0,\quad \cos x = m$

가장 간단한 삼각방정식은 다음과 같다.

$$\sin x = m,\quad \cos x = m,\quad \tan x = m,\quad \cot x = m$$

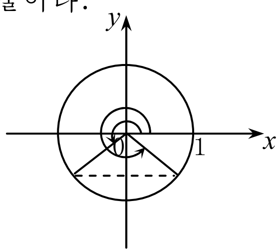
― **주어진 구역에서의 풀이**

［례］ $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0(0 \le x \le 2\pi)$를 풀어라.

풀이. $\sqrt{2}\sin x = -1$

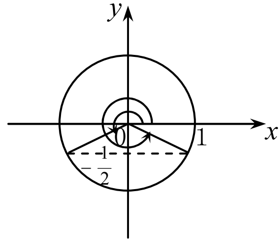
∴ $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\left\{\frac{5}{4}\pi,\quad \frac{7}{4}\pi\right\}$$



[례] $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0\ \ (0\le x\le 2\pi)$

풀이. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$



$\therefore\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{6}\pi,\quad x=\frac{9}{6}\pi$

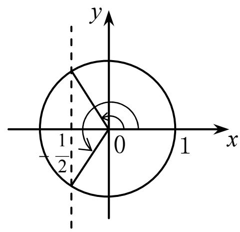
그런데 $0\le x\le 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{7}{3}\pi$$

$\therefore\ \left\{\frac{5}{6}\pi,\ \ \frac{3}{2}\pi\right\}$

[례] $2\cos 2x+1=0\ (0\le x\le 2\pi)$ 를 풀어라.

풀이. $2\cos 2x+1=0$



$\therefore\ \cos 2x=-\frac{1}{2}$

$2x=\mathrm{X},\quad 0\le x\le\pi$ 라면

$\mathrm{X}=\frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{4}{3}\pi$

그런데 $0\le x\le 2\pi$ 이므로

$$0\le 2x\le 4\pi$$

$\therefore\ 2x=\frac{2}{3}\pi$ 이므로 $x=\frac{\pi}{3}$

$2x=\frac{2}{3}\pi+2\pi=\frac{8}{3}\pi$ 이므로 $x=\frac{4}{3}\pi$

$2x=\frac{4}{3}\pi$ 이므로 $x=\frac{2}{3}\pi$

$2x=\frac{4}{3}\pi+2\pi=\frac{10}{3}\pi$ 이므로 $x=\frac{5}{3}\pi$

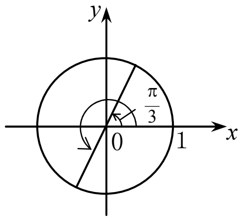
$\therefore\ \left\{\frac{\pi}{3},\ \ \frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{4}{3}\pi,\ \ \frac{5}{3}\pi\right\}$

［례］ $\tan 2x = \sqrt{3}$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 를 풀어라.

풀이. $\tan 2x = \sqrt{3}$

$2x = \mathrm{X}$로 놓으면

$$\tan \mathrm{X} = \sqrt{3}$$



$-\pi \leq \mathrm{X} \leq \pi$ 이라면

$$\mathrm{X} = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$

$-\pi \leq \mathrm{X} \leq \pi$, $\mathrm{X} = 2x$ 이므로

$$-2\pi \leq \mathrm{X} \leq 2\pi$$

$\therefore$ $2x = \frac{1}{3}\pi$ 이므로 $x = \frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi$ 이므로 $x = -\frac{5}{6}\pi$

$2x = \frac{4}{3}\pi$ 이므로 $x = \frac{2}{3}\pi$

$2x = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ 이므로 $x = -\frac{\pi}{3}$

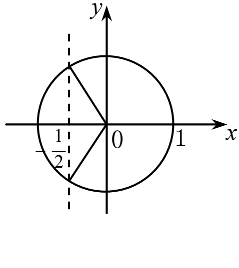
$\therefore$ $\left\{-\frac{5}{6}\pi,\quad -\frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{2}{3}\pi\right\}$

［례］ $2\cos^2 x = 1 + \cos x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ 를 풀어라.

풀이. $2\cos^2 x = 1 + \cos x$

$\therefore$ $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\therefore$ $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$



$\therefore$ $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = 1$

$\therefore$ $\left\{0,\quad \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi,\quad 2\pi\right\}$

— 무한구간에서의 풀이

○ $\sin x = m$ $(|m| \leq 1)$ **의 풀이**

$$x = (-1)^n \arcsin m + k\pi,\quad k \in \mathrm{Z}$$

［례］ $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 풀어라.

풀이. $2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi$

$$x = \frac{1}{2}\left[(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi\right] =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \quad (k \in \mathrm{Z})$$

○ **$\cos x = m(|m| \le 1)$ 의 풀이**

$$x = \pm\arccos m + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$$

［례］ $\cos x = \frac{1}{2}$ 을 풀어라.

$$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathrm{Z})$$

○ **$\tan x = m$ 의 풀이**

$$x = \arctan m + k\pi, \ k \in \mathrm{Z}$$

［례］ $\tan x = \sqrt{3}$ 을 풀어라.

$$x = \arctan\sqrt{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathrm{Z})$$

삼각방정식을 풀 때에는 그것을 먼저 간단한 모양의 삼각방정식으로 고쳐서 푼다.

［례］ $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

풀이. 왼변을 변형하면

$$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$(2t-1)(t+2)=0$$

$$t=\frac{1}{2} \quad t=-2$$

$$\therefore \ \cos x=\frac{1}{2}, \ \cos x=-2 \text{ (버림)}$$

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \ (k\in Z)$$

［례］ 다음것을 증명하여라.

$$\sin x=\sin y \Leftrightarrow x=(-1)^k y+k\pi, \quad k\in Z$$

풀이. $\sin x=\sin y \Leftrightarrow \sin x-\sin y=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2}=0 \quad \text{또는}$$

$$\sin\frac{x-y}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

또는 $\dfrac{x-y}{2}=k\pi \ \ (k\in Z)$

［례］ $\sin x=\cos x$ 를 풀어라.

풀이. $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

례 2에 의하여

$$\frac{\pi}{2}-x=(-1)^k x+k\pi \ \ (k\in Z)$$

$$(-1)^k x+x=\frac{\pi}{2}-k\pi$$

k 가 홀수이면 왼변이 0이므로 $k=2n$ 인 경우만 보자.

$$2x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad n\in Z$$

［례］ $\log_{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=1$ 을 풀어라.

풀이. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in Z)$$

［례］ $\arcsin x=\frac{\pi}{3}$ 를 풀어라.

풀이. $x=\sin(\arcsin x)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

［례］ $4\arctan(x^2-3x+2)-\pi=0$ 을 풀어라.

풀이. $4\arctan(x^2-3x+2)=\pi$

$$\arctan(x^2-3x+2)=\frac{\pi}{4}$$

$$x^2-3x+2=1$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x=1,\quad x=2$$

［례］ $\pi-\arcsin x=\arccos x$ 를 풀어라.

풀이. $\sin(\pi-\arcsin x)=\sin(\arccos x)$

$$\sin(\arcsin x)=\sin(\arccos x)$$

$$x=\sqrt{1-x^2}$$

$$2x^2=1 \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이것은 주어진 방정식에 맞지 않으므로 풀이는 없다.

[련립삼각방정식]

［례］ $\begin{cases} \tan x - \tan y = 2 \\ x + y = \pi \end{cases}$

둘째 방정식에서 $y = \pi - x$ 를 얻고 이것을 첫째 방정식에 갈아넣으면

$$\tan x - \tan(\pi - x) = 2$$

$$2\tan x = 2$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$$

$$y = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{3\pi}{4} - k\pi \quad (k \in Z)$$

∴ 풀이는 $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{3}{4}\pi - k\pi\right),\ k \in Z\right\}$

［례］ $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$

첫째 방정식을 변형하면

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x - y = \pm\frac{2}{3}\pi + 4k\pi$$

∴ $2x = \pi \pm \frac{2}{3}\pi + 4k\pi$

$$x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2y=\pi\mp\frac{2}{3}\pi-4k\pi$$

$$y=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{3}-2k\pi$$

∴ 풀이는 $\left\{\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{3}-2k\pi\right),\ k\in Z\right\}$

[삼각안같기식]

삼각기호안에 변수가 들어있는 안같기식을 **삼각안같기식** 이라고 부른다.

［례］ $\sin x+2>1,\ \cos(\arcsin x)\geq\frac{1}{2}$

－ $\sin x>m$ **의 풀이**

① $m<-1$ 이면 풀이는 $-\infty<x<+\infty$

② $-1\leq m\leq 1$ 이면 풀이는

$\arcsin m+2k\pi<x<(\pi-\arcsin m)+2k\pi,\ \ k\in Z$

③ $m\geq -1$ 이면 풀이는 없다.

［례］ $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 풀이

$[0,\ 2\pi]$ 에서 안같기식의 풀이는

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$$

∴ $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 안같기식의 풀이는

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi\ \ (k\in Z)$$

－ $\cos x>m$ **의 풀이**

① $m<-1$ 이면 풀이는 $-\infty<x<+\infty$

② $-1\leq m<1$ 이면 풀이는

$-\arccos m+2k\pi<x<\arccos m+2k\pi,\ \ k\in Z$

③ $m\geq -1$ 이면 풀이는 없다.

［례］ $\cos x > \frac{1}{2}$ 의 풀이

$[-\pi,\ \pi]$ 에서 안갈기식의 풀이는 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

∴ $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 안갈기식의 풀이는

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

－ **$\tan x > m$ 의 풀이**

$$\arctan m + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$$

［례］ $\tan x > 3$ 의 풀이

$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 안갈기식의 풀이는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

∴ $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 안갈기식의 풀이는

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$$

［례］ $\sin x > \cos^2 x$ 를 풀어라.

풀이. $\sin x - \cos^2 x > 0$

$\sin x - (1 - \sin^2 x) > 0$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 1 > 0$$

$$t \in \left(-\infty,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right)$$

한편 $t \in [-1,\ 1]$ 이므로 $t \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$

이로부터 $\sin x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

이것을 풀면

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2k\pi<x<-\arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2}+(2k+1)\pi \quad (k\in \mathrm{Z})$$

［례］ $\sin x>\sin 3x$ 의 풀이

$$\sin x-\sin 3x>0$$

$$-2\cos 2x\sin x>0$$

$$\cos 2x\sin x<0$$

∴ ① $\begin{cases}\cos 2x>0\\ \sin x<0\end{cases}$ 또는 ② $\begin{cases}\cos 2x<0\\ \sin x>0\end{cases}$

$[-\pi,\ \pi]$ 에서

①의 풀이는 $\left(-\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi\right),\ \left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)$

②의 풀이는 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)$

∴ $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 주어진 안갈기식의 풀이는

$$\left(-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\ -\frac{1}{2}\pi+2k\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ 2k\pi\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2k\pi\right) \quad (k\in Z)$$

제5장. 평면도형

1. 도 형

도형들은 면, 선, 점으로 이루어져있다.

면에는 평면과 곡면(굽은면)이 있고 선에는 직선과 곡선(굽은선)이 있다.

[도형]

한 평면에 다 놓을수 있는 도형을 **평면도형**, 한 평면에 다 놓을수 없는 도형을 **공간도형**이라고 부른다.

[다문선]

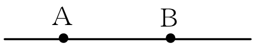
끝점이 없는 선을 **다문선**, 끝점이 있는 선을 **벌어진선**이라고 부른다.

[직선]

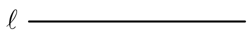
직선은 량쪽으로 곧추 뻗어있는 선이다.

두 점을 지나는 직선은 꼭 하나 있다. 이때 두 점은 한 직선을 결정한다고 말한다. 두 점 A, B를 지나는 직선을 《직선 AB》로 표시한다.

직선을 한 글자로 표시할 때도 있다.



《직선 AB》

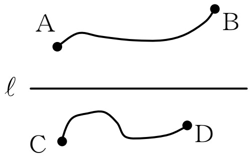


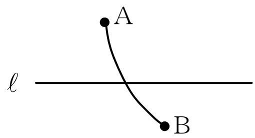
《직선 ℓ》

[반평면]

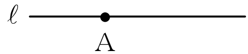
직선 ℓ은 평면을 두 부분으로 나누며 이때 그 직선과 한쪽부분을 **반평면**이라고 부른다

한 반평면의 두 점은 직선 ℓ과 사귀지 않는 선으로 맺을수 있다. 그러나 서로 다른 두 반평면에 놓인 두 점을 맺는 선은 반드시 직선 ℓ과 사귄다.





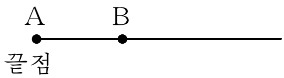
직선 ℓ의 한 점 A는 직선을 두 부분으로 나눈다.



[반직선]

한 점 A에 의하여 두 부분으로 나누이는 직선의 매개 부분을 **반직선**이라고 부르고 점 A를 반직선의 **끝점**이라고 부른다. 반직선은 그림과 같이 표시한다.

여기서 B는 반직선에 있는 다른 한 점이다.



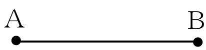
《반직선 AB》



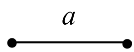
《반직선 ℓ》

[선분]

두 끝점을 가진 직선의 토막을 **선분**이라고 부른다.
《선분 AB》라고 하면 그 길이를 말할 때도 있다.



《선분 AB》
또는 《선분 BA》



《선분 *a*》

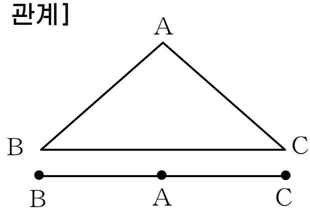
[세 점을 각각 맺는 선분들사이의 관계]

- A가 BC에 놓이지 않으면

  AB+AC>BC

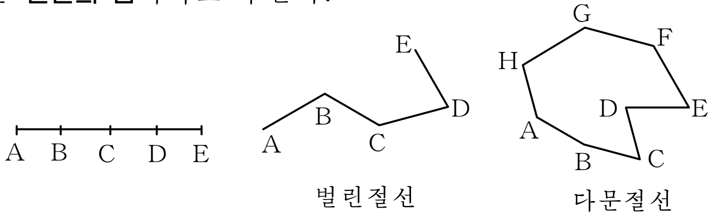
- A가 BC에 놓이면

  AB+AC=BC



[절선]

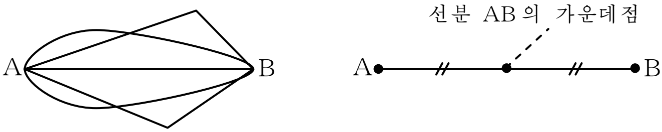
그림과 같이 한 선분 AE에 차례로 점 B, C, D를 찍고 그 점들에서 꺾으면 선분토막들이 이어진 도형이 얻어진다. 이런 도형을 **절선**이라고 부른다. 이때 A, B, C, D, E를 **절선의 점**이라고 부른다.



특히 끝점이 없는 절선을 **다문절선**이라고 부른다.

[두 점사이의 거리]

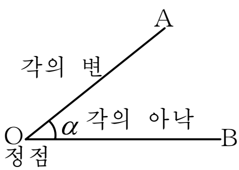
두 점을 맺는 선분은 그 두 점을 맺는 선들가운데서 길이가 가장 짧다. 두 점 A, B를 맺는 선분의 길이를 **두 점 A, B사이의 거리**라고 부르고 d(A, B)로 표시한다.



선분을 둘로 꼭같게 나누는 점을 선분의 **가운데점**이라고 부른다.

[각]

한 점 O에서 나간 두 반직선 OA, OB와 그 사이에 끼인 평면의 부분을 **각**이라고 부른다. 《∠AOB》라고 하면 그 각의 크기를 말할 때도 있다.



《각 AOB》

《∠AOB》

《∠α》

상식

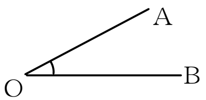
초등기하의 첫 공리계를 내놓은 뛰여난 수학자 힐베르트(1862-1943, 도이췰란드)

그는 23살에 수학박사가 되였다. 그는 1898-1902년에 초등기하의 공리계를 내놓았다. 힐베르트는 20세기에 해결하여야 할 23개 문제(힐베르트의 23개 문제라고 불리우고있다.)를 제기하여 유명하여졌다. 그는 적분방정식론, 힐베르트공간론, 포텐샬론 등 넓은 령역에서 커다란 공적을 남기였다.

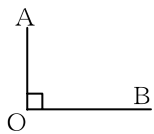
힐베르트는 기억력은 좋지 않았지만 수학에는 해결하지 못할 문제가 없다는 신념을 가지고있었다고 한다.

힐베르트의 역할로 1910년대, 1920년대 도이췰란드의 괴팅겐대학은 수학중심지의 하나로 되고있었다. 그런데 1933년에 히틀러가 집권하자 형편은 달라졌다. 이 대학의 이름있는 수학자들은 거의 다 외국망명을 떠났고 힐베르트 혼자 남아 생의 마지막 10년을 대학과 동떨어져 살았다고 한다.

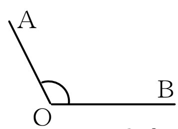
여러가지 각들의 이름



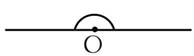
뾰족각
(직각보다 작은 각)



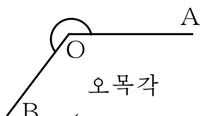
직각



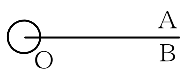
무딘각
(직각보다 크고
평각보다 작은 각)



평각



오목각
(평각보다 크고 한
바퀴각보다 작은 각)



한바퀴각

– **각의 단위**

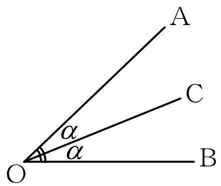
$1°$ (1도) = 한바퀴각의 $\frac{1}{360}$ 　한바퀴각 = $360°$

평각 = $180°$ 　직각 = $90°$

$1'$ (1분) = $1°$ 의 $\frac{1}{60}$ 　$1''$ (1초) = $1'$ 의 $\frac{1}{60}$

$1° = 60'$ 　$1' = 60''$

– **각의 2등분선**



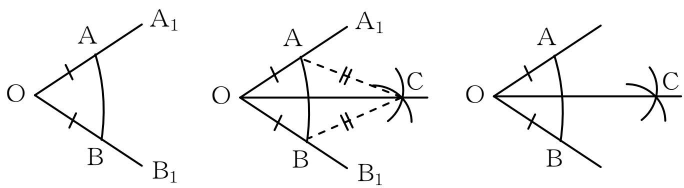
∠AOB를 둘로 꼭같게 나누는 한 직선 OC를 그 **각의 2등분선**이라고 부른다.

각의 2등분선 긋기

○ 콤파스로 OA=OB 되게 점 A, B를 찍는다.

○ A를 중심으로 AB의 절반보다 큰 반경으로 원둘레를 그리고 B를 중심으로 그와 반경이 꼭같은 원둘레를 그려서 사귐점 C를 찾는다.

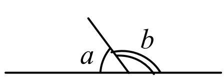
○ O와 C를 맺는 직선을 긋는다.



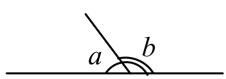
[보탬각]

두 각의 합이 평각이면 그 두 각을 서로 **보탬각**이라고 부른다. 즉 $\angle a + \angle b = 180°$ 일 때 $\angle a$와 $\angle b$를 서로 **보탬각**이라고 부른다.

$\angle a$의 한 변과 $\angle b$의 한 변이 겹칠 때 그 두 각을 **곁보탬각**이라고 부른다.



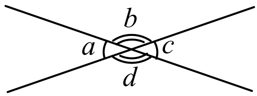
보탬각



곁보탬각

[맞문각]

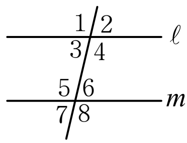
두 직선이 사귀여 생긴 각들가운데서 서로 마주하고있는 각을 **맞문각**이라고 부른다.



맞문각은 서로 같다.

[두 직선이 셋째 직선과 사귀여 생기는 각들]

두 직선이 셋째 직선과 사귈 때 8개의 각이 생긴다. 이때



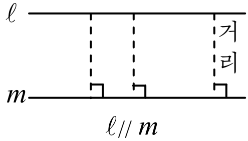
$\angle 1$과 $\angle 5$, $\angle 2$와 $\angle 6$,
$\angle 3$과 $\angle 7$, $\angle 4$와 $\angle 8$

을 **같은자리각**이라고 부르며 $\angle 3$과 $\angle 6$, $\angle 4$와 $\angle 5$를 **엇각**이라고 부른다. 그리고 $\angle 3$과 $\angle 5$, $\angle 4$와 $\angle 6$을 **한쪽아낙각**이라고 부른다.

2. 평행직선

[평행]

평면에서 두 직선이 사귀지 않을 때 그 두 직선은 서로 **평행**이라고 말한다. 직선 ℓ과 m이 평행이라는것을 $\ell /\!/ m$과 같이 표시한다. 두 평행직선 ℓ과 m사이의 거리를 $d(\ell, m)$로 표시한다.



직선밖의 한 점을 지나며 그 직선에 평행인 직선은 하나만 그을수 있다.

— **평행직선의 성질**

두 직선이 평행이면

○ 같은자리각이 같다.

○ 엇각이 같다.

— **평행직선이 될 조건**

○ 같은자리각이 같을 때

○ 엇각이 같을 때

상식

비유클리드기하학을 발견한
로바쳅스끼(1792-1856, 로씨야)

로바쳅스끼는 8살 때 학교에 최고성적으로 입학하였다. 중학교를 졸업할 때 도이췰란드어를 로어처럼 자유롭게 하였다고 한다. 그는 대학기간에 여러마디식의 나누기와 방정식의 풀이법에 관한 가치있는 론문을 썼다.

그는 비유클리드기하학을 발견한 죄 아닌 《죄》로 대학총장직위에서 쫓겨났는데 그를 미친 사람이라고 조소까지 하는 사람들도 있었다. 그러나 그는 죽을 때까지 굴하지 않고 자기의 기하학연구를 계속하였다.

그가 사망한지 12년후에야 그의 공적이 평가되였다.

1892년에 그의 생일 100돐을 성대히 기념하였고 1896년에 까잔에는 그의 기념비를 세웠으며 1947년에는 로바쳅스끼 이름이 붙은 국제상이 제정되였다.

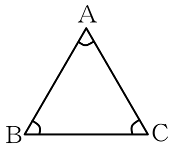
3. 3각형

[3각형]

정점, 변, 각이 각각 3개인 다각형을 **3각형**이라고 부른다.

3각형의 세 아낙각의 합은 180°이다.

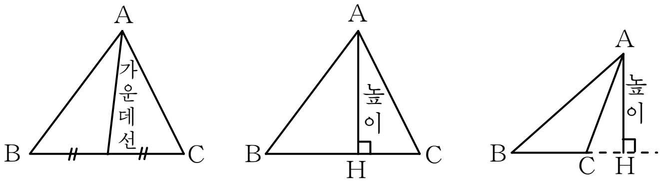
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



세개의 각 A, B, C와 세개의 변 AB, BC, CA를 3각형의 **요소**라고 부른다.

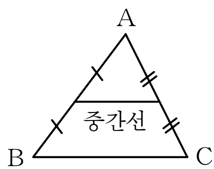
[3각형의 가운데선, 높이, 중간선]

3각형의 한 정점과 그 맞은변의 가운데점을 맺는 선분을 3각형의 **가운데선**이라고 부른다.



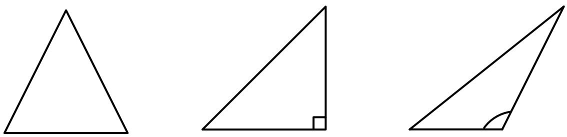
3각형의 한 정점에서 맞은변 또는 그 연장선에 그은 수직선분을 3각형의 **높이**라고 부른다.

3각형의 두 변의 가운데점을 맺는 선분을 3각형의 **중간선**이라고 부른다.



[각에 의한 3각형의 구분]

3각형에서 세 각이 다 뾰족각이면 **뾰족3각형**, 한 각이 무딘각이면 **무딘3각형**, 한 각이 직각이면 **직3각형**이라고 부른다.



뾰족3각형 직3각형 무딘3각형

[3각형에서 변들사이의 관계]

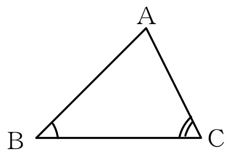
○ 3각형에서 한 변은 다른 두 변의 합보다 작다.

△ABC에서

AB＜BC＋CA

BC＜AB＋AC

AC＜AB＋BC

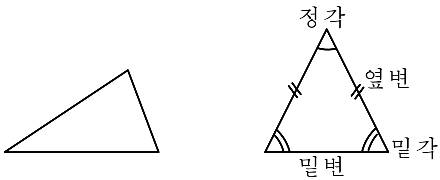


○ 3각형에서 한 변은 다른 두 변의 차보다 크다.

△ABC에서

AB＞BC－AC
BC＞AB－AC
AC＞AB－BC

[변에 의한 3각형의 구분]



세 변이 같지 않은 3각형 | 두 변이 같은 3각형 (2등변3각형) | 세 변이 같은 3각형 (바른3각형)

[3각형의 결정조건]

○ 세 변(두 변의 합은 다른 변보다 크다.)

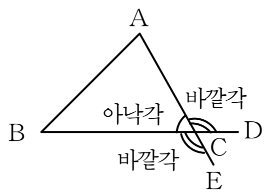
○ 두 변과 그사이에 끼인 각

○ 한 변과 그 변에 붙은 두 각(두 각의 합은 180° 보다 작다.)

[3각형의 바깥각]

△ABC에서 변 BC를 연장하였을 때 생기는 각 ∠ACD를 아낙각 ∠C의 **바깥각**이라고 부른다.

변 AC를 연장하였을 때 생기는 각 ∠BCE도 아낙각 ∠C의 바깥각이다.



3각형의 한 바깥각은 그 곁에 있지 않는 두 아낙각의 합과 같다.

[직3각형]

직3각형에서 직각을 끼고있는 두 변을 각각 **직각변**이라고 부르며 직각의 맞은변을 **빗변**이라고 부른다.

두 직각변이 같은 직3각형을 **직2등변3각형**이라고 부른다.

[2등변3각형의 성질]

○ 2등변3각형의 두 밑각은 같다.

○ 2등변3각형에서 정각의 2등분선은 밑변의 수직2등분선이다.

○ 2등변3각형은 정각의 2등분선(높이,가운데선)에 관한 축대칭도형이다.

[2등변3각형이 될 조건]

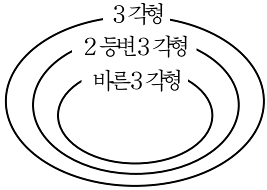
두 각이 같은 3각형은 2등변3각형이다.

— **바른3각형의 성질**

○ 바른3각형의 세 각은 다 같으며 60°이다.

△ABC에서 AB=BC=CA이면

$$\angle A=\angle B=\angle C$$



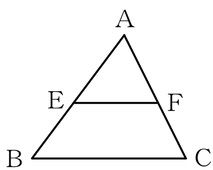
○ 세 각이 다같은 3각형은 바른3각형이다.(거꿀정리)

△ABC에서 ∠A=∠B=∠C이면

$$AB=BC=CA$$

[3각형의 중간선의 성질]

○ 3각형의 중간선은 밑변에 평행이며 그의 절반과 같다.



△ABC에서 AB, AC의 가운데점을 맺은 중간선을 EF라고 하면

$$BC//EF,\ EF=\frac{1}{2}\cdot BC$$

○ △ABC의 변 AB의 가운데점 E를 지나며 BC에 평행인 직선이 AC와 사귀는 점을 F라고 하면 점 F는 AC의 가운데점이고 $EF=\frac{1}{2}\cdot BC$

△ABC에서 AE=EB, EF//BC이면

$$AF=FC,\ EF=\frac{1}{2}\cdot BC$$

[3각형의 가운데선의 성질]

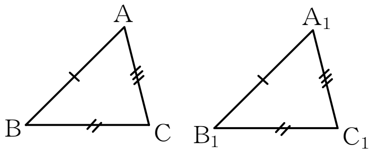
△ABC에서 AD를 3각형의 가운데선이라고 하면

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$$

[3각형의 합동조건]

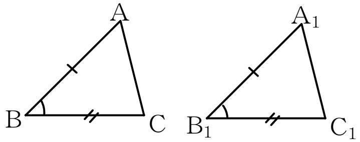
두 3각형에서

① 대응하는 세쌍의 변들이 각각 같을 때(세변조건)



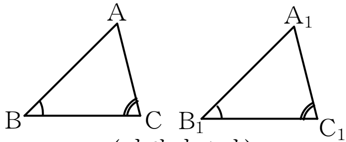
(세변조건)

② 대응하는 두 변들과 그사이의 각들이 각각 같을 때(변각변조건)



(변각변조건)

③ 한쌍의 변들과 그 변들에 붙은 두 각들이 각각 같을 때(각변각조건)



(각변각조건)

두 3각형은 합동이다.

[직3각형의 합동조건]

두 직3각형에서

○ 두쌍의 직각변이 각각 같을 때

○ 대응하는 한쌍의 변과 한쌍의 뾰족각이 각각 같을 때

○ 빗변들과 대응하는 한쌍의 직각변이 각각 같을 때 두 직3각형은 합동이다.

4. 4각형

[4각형]

4개의 변을 가진 다각형을 **4각형**이라고 부른다.

4각형에는 4개의 변과 4개의 각이 있다. 4각형에서 공통점들을 가지지 않는 변들을 **맞은변**이라고 부른다.

4각형 ABCD에서 AB와 CD, BC와 AD는 맞은변들이다.

4각형에서 대각선은 2개이다.(AC와 BD)

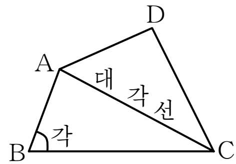
4각형의 네 아낙각의 합은 360° 이다.

즉 4각형 ABCD에서

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$$

4각형의 바깥각의 합은 360° 이다.

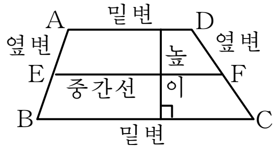
[4각형의 결정조건]



○ 네 변과 한 대각선이 주어지면 4각형은 결정된다.

○ 네 변과 한 아낙각이 주어지면 4각형은 결정된다.

[제형]



한쌍의 맞은변이 평행인 4각형을 **제형**이라고 부른다. 제형에서 평행인 두 변을 **밑변**, 다른 두 변을 **옆변**이라고 부르며 두 밑변사이에 끼인 수직선분을 제형의 **높이**라고 부른다. 제형에서 두 옆변의 가운데점을 맺는 선분을 제형의 **중간선**이라고 부른다.

○ 제형에서 한 옆변에 붙은 두 각은 서로 보탬각이다. 제형 ABCD(AD//BC)에서

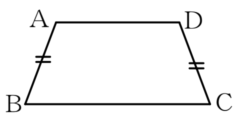
$$\angle A+\angle B=180°\ ,\ \angle C+\angle D=180°$$

○ 제형의 중간선은 밑변들에 평행이며 그 두 밑변의 합의 절반과 같다.

제형 ABCD(AD//BC)에서 AE=EB, DF=FC이면

$$EF//BC,\ EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$$

[바른제형]



두 옆변이 평행이 아니면서 서로 같은 제형을 **바른제형**이라고 부른다.

○ 등각제형에서 한 밑변에 붙은 두 각은 같다.

제형 ABCD(AD//BC)에서 AB＝DC이면

∠A＝∠D, ∠B＝∠C

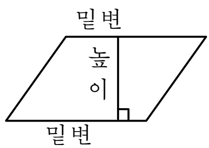
○ 제형에서 한 밑변에 붙어있는 두 각이 같으면 그 제형은 등각제형이다.

제형 ABCD(AD//BC)에서 ∠A＝∠D(또는 ∠B＝∠C) 이면 AB＝DC

[평행4변형]

두쌍의 맞은변이 서로 평행인 4각형을 **평행4변형**이라고 부른다. 평행4변형은 옆변이 서로 평행인 제형이다.

평행4변형에서 평행인 두 변 또는 그 연장선사이에 끼인 수직선분을 평행4변형의 **높이**라고 부른다. 이때 높이에 대하여 평행인 두 변을 **밑변**이라고 부른다.



평행4변형 ABCD를 ▱ABCD와 같이 표시하기도 한다.

[평행4변형의 성질]

○ 평행4변형에서 두쌍의 맞은변은 각각 서로 같다.

4각형 ABCD에서

AB//DC, AD//BC이면

AB＝DC, AD＝BC

○ 평행4변형에서 두쌍의 맞은각은 각각 서로 같다.

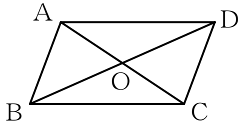
4각형 ABCD에서 AB//DC, AD//BC이면

∠A＝∠C, ∠B＝∠D

○ 평행4변형에서 두 대각선은 사귐점에서 서로 2등분한다.

4각형 ABCD에서 AB//DC, AD//BC, AC와 BD의 사귐점을 O라고 하면

AO＝OC, BO＝OD



[평행4변형이 될 조건]

○ 두쌍의 맞은변이 각각 서로 같은 4각형은 평행4변형이다.

4각형 ABCD에서 AB＝DC, AD＝BC이면

AB//DC, AD//BC

○ 한쌍의 맞은변이 서로 평행이고 같은 4각형은 평행4변형이다.

4각형 ABCD에서 AD$\underline{\parallel}$BC이면

AB//DC, AD//BC

○ 두 대각선이 사귐점에서 서로 2등분되는 4각형은 평행4변형이다.

4각형 ABCD에서 AO＝OC, BO＝OD(O는 두 대각선의 사귐점)이면

AB//DC, AD//BC

[직4각형]

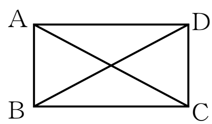
네 각이 다 직각인 4각형을 **직4각형**이라고 부른다.

[직4각형의 성질]

직4각형의 두 대각선은 같다.

▱ABCD에서 ∠A＝90° 이면

AC＝BC



[직4각형이 될 조건]

두 대각선이 같은 평행4변형은 직4각형이다.

▱ABCD에서 AC＝BD이면 ∠A＝90°

[등변4각형]

네 변이 다 같은 4각형을 **등변4각형**이라고 부른다.

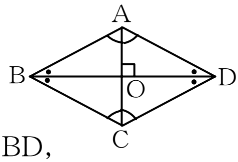
[등변4각형의 성질]

○ 등변4각형의 두 대각선은 서로 수직2등분한다.

▱ABCD에서 AB＝AD이면

AC⊥BD, AO＝OC, BO＝OD(여기서 O는 대각선의 사귐점)

○ 등변4각형의 대각선은 아낙각을 2등분한다.



▱ABCD에서 AB＝AD이면

∠BAC＝∠DAC, ∠ABD＝∠CBD,

∠ADB＝∠CDB, ∠BCA＝∠DCA

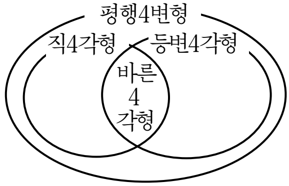
[등변4각형이 될 조건]

두 대각선이 서로 수직인 평행4변형은 등변4각형이다.

▱ABCD에서 AC⊥BD이면 AB＝AD

[바른4각형]

네 변이 다 같고 네 아낙각이 다 같은 4각형을 **바른4각형**이라고 부른다. 바른4각형은 등변4각형이면서 직4각형이다.



[바른4각형의 성질]

바른4각형은 직4각형과 등변4각형이 가지는 성질을 다 가진다.

○ 바른4각형의 두 대각선은 서로 같다.

○ 바른4각형의 두 대각선은 서로 수직2등분한다.

○ 바른4각형의 대각선은 아낙각을 2등분한다.

[바른4각형이 될 조건]

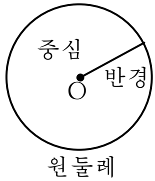
두 대각선이 같고 서로 수직2등분하는 4각형은 바른4각형이다.

5. 원

[원둘레와 원]

평면에서 한 점으로부터 정해진 거리에 있는 점들의 모임을 **원둘레**라고 부른다.

원둘레와 그로 둘러막힌 평면의 부분을 **원**이라고 부른다.



여기서 주어진 한 점을 원(원둘레)의 **중심**, 중심과 원둘레의 한 점을 맺는 선분 또는 그 길이를 원(원둘레)의 **반경**이라고 부른다.

중심이 O, 반경이 r인 원 또는 원둘레를 O(r)와 같이 표시한다.

원에서는 임의의 두 점을 맺는 선분이 원안에 있다.

두 점을 맺는 선분이 그 도형에 들어있을 때 이런 도형을 **볼록도형**, 그렇지 않는 도형을 **오목도형**이라고 부른다.

[활등과 활줄]

두 끝점이 있는 원둘레의 한 부분을 **활등**이라고 부르고 $\overset{\frown}{AB}$와 같이 표시한다.

활등의 두 끝점을 맺는 선분을 그 활등에 대한 **활줄**이라고 부른다.

원의 직경은 중심을 지나는 활줄이다.

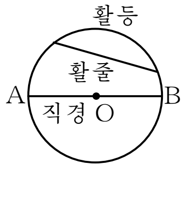
직경은 반경의 2배이다.

[반원]

직경에 의하여 나누이는 원의 부분을 **반원**, 원둘레의 부분을 **반원둘레**라고 부른다.

반원둘레보다 큰 활등은 흔히 세 글자로 표시한다.

$$\overset{\frown}{ABC}$$

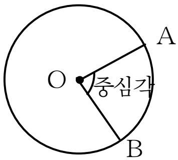


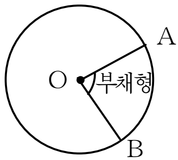
원의 두 끝점을 맺는 선분들가운데서 중심 O를 지나며 두 끝점이 원둘레에 있는 선분 AB가 가장 길다. 이것을 원의 **직경**이라고 부른다.

[중심각과 부채형]

한 원에서 두 반경이 만드는 각을 **중심각**이라고 부른다.

중심각 ∠AOB에 있는 활등 $\overset{\frown}{AB}$를 중심각 ∠AOB에 대한 활등, 중심각 ∠AOB를 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 중심각이라고 부른다.





원과 중심각과의 사귐(공통부분)을 **부채형**이라고 부른다.

반원둘레의 한 점 M을 직경 AB의 두 끝점과 맺었을 때 생기는 각을 **직경에 대한 원둘레각**이라고 부른다.

직경에 대한 원둘레각은 직각이다.

[원과 회전, 원의 대칭]

두 활등 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$에 대한 중심각을 ∠AOB, ∠COD라고 할 때

$$\angle AOB = \angle COD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

[활등과 중심각사이의 관계]

한 원에서 중심각의 크기는 그에 대한 활등의 길이에 비례한다.

○ 한 원에서 중심각이 서로 같으면 그에 대한 활줄도 서로 같고 또 활줄이 서로 같으면 그에 대한 중심각도 서로 같다.

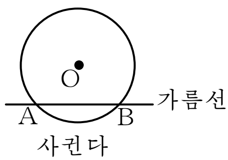
○ 한 원에서 활줄이 서로 같으면 중심으로부터 그 활줄까지의 거리도 서로 같다.

○ 직경에 수직인 활줄은 그 직경에 의하여 2등분된다.

활줄에 수직인 직경은 그 활줄과 그에 대한 활등을 2등분한다.

한 활줄에 의하여 원은 두 부분으로 나누이는데 매개 부분을 **활형**이라고 부른다.

[원둘레와 직선의 자리관계]

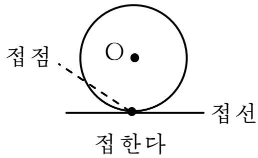


○ 원둘레와 직선이 두 점을 공통으로 가지는 경우

이때 직선과 원둘레는 사귄다고 말하며 이 직선을 원둘레의 **가름선**이라고 부른다.

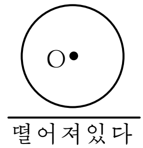
○ 원둘레와 직선이 한 점만을 공통으로 가지는 경우

이때 이 직선은 원둘레에 **접한다**고 말하며 이 직선을 **원의 접선**, 공통으로 가지는 점을 **접점**이라고 부른다.



○ 원둘레와 직선이 공통점을 가지지 않는 경우

이때 직선과 원둘레는 떨어져있다고 말한다.



※ 원둘레의 반경을 r, 중심 O에서 직선까지의 거리를 d라고 하면

떨어져있는 경우 $r < d$

접하는 경우 $r = d$

사귀는 경우 $r > d$

각의 두 변에 한 원이 접할 때

각의 정점에서 접점까지의 거리는 같다.

정점과 원의 중심을 맺는 직선은 이 각을 2등분한다.

※ 두 원둘레의 사귐점에서 매 원에 접선을 그었을 때 그 두 접선사이의 각을 그 사귐점에서 **두 원둘레사이의 각**이라고 부른다.

[두 원둘레의 자리관계]

○ 두 원둘레가 공통점을 가지지 않으면서 서로 다른것의 밖에 있는 경우

이때 두 원둘레는 떨어져있다고 말한다.

○ 두 원둘레가 하나의 공통점을 가지며 서로 다른것의 밖에 있는 경우

이때 두 원둘레는 **외접한다**고 말하며 그 공통점을 **접점**이라고 부른다.

○ 두 원둘레가 2개의 공통점을 가지는 경우

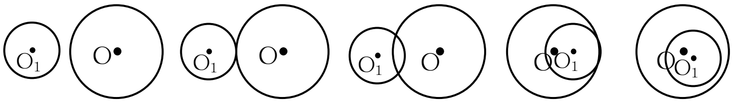
이때 두 원둘레는 사귄다고 말한다.

○ 두 원둘레가 하나의 공통점을 가지며 한 원이 다른 원 아낙에 놓이는 경우

이때 두 원둘레는 **내접한다**고 말하며 그 공통점을 **접점**이라고 부른다.

○ 두 원둘레가 공통점을 가지지 않으면서 한 원이 다른 원 아낙에 있는 경우

이때 한 원이 다른 원에 들어있다고 말한다.



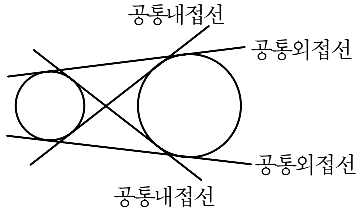
· 두 원둘레 O, O_1가 사귀면 두 사귐점은 중심선 OO_1에 관하여 대칭이다.

· 두 원둘레 O, O_1가 서로 접하면 접점은 중심선에 놓인다.

[두 원의 공통접선]

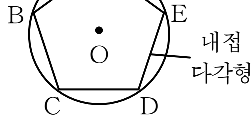
한 직선이 두 원에 동시에 접할 때 이 직선을 두 원의 **공통접선**이라고 부른다.

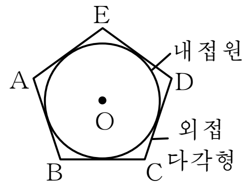
두 원이 공통접선의 한쪽에만 놓일 때 이 공통접선을 **공통외접선**, 두 원이 공통접선의 량쪽에 놓이면 이 공통접선을 **공통내접선**이라고 부른다.



[외접원과 내접원]

다각형의 모든 정점이 한 원둘레에 놓일 때 그 다각형은 원에 **내접한다**고 말하고 그 원을 다각형의 **외접원**이라고 부른다.





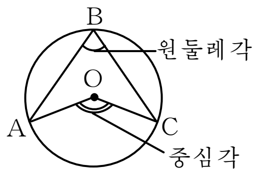
다각형의 모든 변들이 한 원둘레에 접할 때 그 다각형은 원에 **외접한다**고 말하고 그 원을 다각형의 **내접원**이라고 부른다.

3각형의 세 변의 수직2등분선은 한 점에서 사귀는데 이 점은 외접원의 중심으로 된다.

이 점을 3각형의 **외심**이라고 부른다.

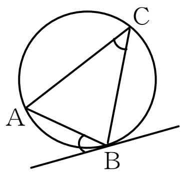
3각형의 세 각의 2등분선은 한 점에서 사귀는데 이 점은 내접원의 중심이 된다. 이 점을 3각형의 **내심**이라고 부른다.

[원둘레각]



원둘레의 한 점에서 두 활줄이 사귈 때 그사이의 각을 그 두 활줄 사이에 끼인 활등 또는 활줄에 대한 **원둘레각**이라고 부른다.

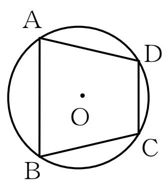
· 원둘레각은 같은 활등에 대한 중심각의 $\frac{1}{2}$과 같다.



· 원둘레의 한 점에서 활줄과 접선을 그었을 때 그사이의 각은 그 각 아낙에 있는 활등에 대한 원둘레각과 같다.

[내접4각형의 성질과 조건]

— 내접4각형의 성질



원에 내접하는 4각형에서 맞은각의 합은 $2\angle R$ 이다.

즉 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=2\angle R$

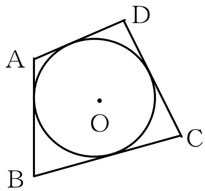
— 내접4각형이 될 조건

어떤 4각형에서 맞은각의 합이 $2\angle R$ 이면 그 4각형은 원에 내접한다.

[외접4각형의 성질과 조건]

– 외접4각형의 성질

원에 외접하는 4각형에서 맞은변의 길이의 합은 같다.



즉 AB+CD=AD+BC

– 외접4각형이 될 조건

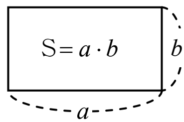
어떤 4각형에서 맞은변의 길이의 합이 같으면 그 4각형은 원에 외접한다.

6. 평면도형의 면적

[다각형의 면적]

– 직4각형의 면적

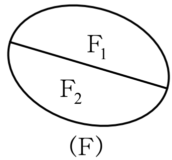
직4각형의 면적은 두 이웃변의 길이를 곱한 적과 같다. 즉 직4각형 ABCD의 이웃변의 길이를 a, b라고 하면 면적 S는



$$S=a\cdot b$$

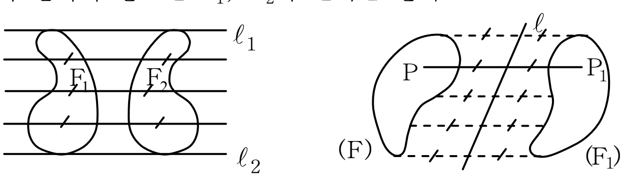
※ 한 도형 F가 2개의 도형 F_1, F_2로 갈라지면

F의 면적=F_1의 면적+F_2의 면적



※ 면적 원리

두 평면도형 F_1, F_2을 한직선우에 놓고 그 직선에 평행인 직선으로 F_1, F_2를 자를 때 매번 그 자름선의 길이가 같으면 F_1, F_2의 면적은 같다.

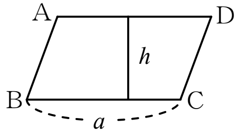


※ 빗대칭이동과 빗대칭축

도형 F를 그림과 같이 도형 F_1로 넘기는것을 도형 F의 **빗대칭이동**이라고 부르며 직선 ℓ을 **빗대칭축**이라고 부른다.

빗대칭이동에서 도형의 면적은 변하지 않는다.

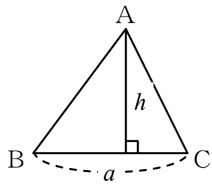
— **평행4변형의 면적**



평행4변형의 면적은 밑변과 높이와의 적과 같다.

즉 $S = a \cdot h$

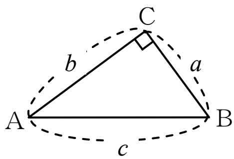
— **3각형의 면적**



3각형의 면적은 밑변과 높이와의 적의 절반과 같다.

즉 $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

— **피다고라스의 공식**

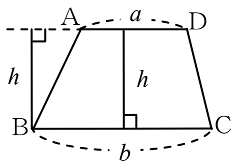


직3각형에서 빗변의 2제곱은 두 직각변의 2제곱의 합과 같다.

즉 △ABC에서 ∠C=∠R이면

$$c^2 = b^2 + a^2$$

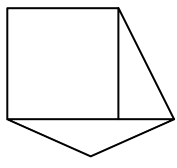
— **제형의 면적**



제형의 면적은 두 밑변의 합과 높이와의 적의 절반과 같다.

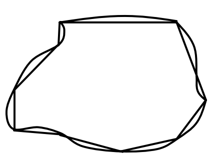
즉 $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$

— **다각형의 면적**



다각형의 면적을 구하려면 그 다각형을 몇개의 3각형이나 제형으로 나누고 그 면적들을 계산하여 더하면 된다.

— **곡면도형의 면적**

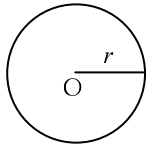


주어진 도형에 가까운 다각형을 그린다.

그 다각형의 면적을 구한다.

[원의 면적]

원 O에서 원둘레의 길이 ℓ과 직경 $2r$의 비는



$$\frac{\ell}{2r}=3.14159265359\cdots$$

인 상수이다. 이것을 **원둘레률**이라고 부르고 π로 표시한다.

$\ell=2\pi r$ (원둘레의 길이)

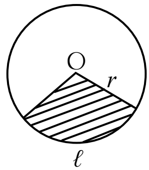
— 원의 면적

원의 면적은 반경의 2제곱에 원둘레률 π를 곱한 적과 같다.

즉 $S=\pi r^2$

— 부채형의 면적

부채형의 면적은 반경과 활등의 길이의 적의 절반과 같다.



즉 $S=\frac{\pi r^2}{2\pi r}\ell=\frac{1}{2}r\ell$

상식

《주해수용》을 쓴 우리 나라
수학자 홍대용(1731-1783)

그는 1765년에 사신일행으로 외국에 갔을 때 유럽의 자연과학을 료해한 다음 귀국하여 일생을 학문연구에 바치였다.

그는 30대에 벌써 당당한 학자로 되였다.

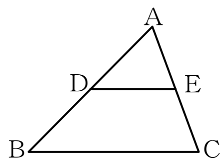
1770년에 쓴 수학책 《주해수용》에서는 고차방정식의 근사풀이법을 체계화하였다. 여기에는 삼각공식들, 3각형의 풀이, 3각형의 내접원과 외접원의 반경구하기, 특수각의 삼각함수값계산 등 풍부한 수학내용이 들어있다.

이 책은 홍대용이 살아있는 기간에 출판되지 못하고 원고상태로 있다가 1939년에 출판되였다.

7. 도형의 닮음

[비례선분]

― 평행직선에서의 비례선분



○ 3각형의 한 변에 평행인 직선은 다른 두 변을 비례하는 선분들로 나눈다.

$$BC /\!/ DE \Leftrightarrow \left(\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\right)$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{CE}\ \left(\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\right)$$

○ 세 평행직선은 그것들과 사귀는 두 직선에서 비례하는 선분들을 끊어낸다.

○ 3각형의 두 변을 비례하는 선분들로 나누는 직선은 셋째 변에 평행이다.

○ $\triangle ABC$에서 $DE /\!/ BC (D \in AB, E \in AC)$이면

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

― 내분과 외분

선분 AB의 점 M에 대하여 $AM:MB=a:b$이면 점 M은 선분 AB를 $a:b$의 비로 **내분(아낙나눔)**한다고 말한다.

선분 AB의 연장선의 점 N에 대하여 $AN:BN=a:b$이면 점 N은 선분 AB를 $a:b$의 비로 **외분(바깥나눔)**한다고 말한다.

[닮음도형]

― 닮은 도형

두 도형에서 대응하는 선분들의 비가 다 같고 대응하는 각들의 크기가 같을 때 그 **두 도형은 닮았다**고 말한다.

두 도형 F와 F_1이 닮았다는것을 $F \backsim F_1$과 같이 표시한다.

닮은 두 도형에서 대응하는 선분들의 비를 **닮음비**라고 부른다.

— **3각형의 닮음조건**

○ 두 3각형에서 세쌍의 대응변의 비가 다 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

○ 두 3각형에서 두쌍의 대응변의 비가 같고 그사이의 각이 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

두 직3각형에서 빗변들의 비와 한쌍의 대응하는 직각변들의 비가 같으면 그 두 직3각형은 닮았다.(직3각형의 닮음조건)

○ 두 3각형에서 두쌍의 대응하는 아낙각이 각각 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

8. 도형에서의 크기관계

[3각형에서의 크기관계]

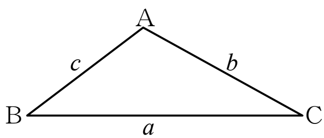
— **3각형의 각과 변의 크기관계**

○ △ABC에서

1) $\angle B > \angle C \Rightarrow b > c$

2) $\angle B < \angle C \Rightarrow b < c$

3) $\angle B = \angle C \Rightarrow b = c$



○ △ABC에서

1) $b > c \Rightarrow \angle B > \angle C$

2) $b < c \Rightarrow \angle B < \angle C$

3) $b = c \Rightarrow \angle B = \angle C$

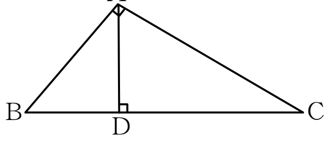
— **직3각형에서의 비례선분**

○ 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변 BC에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면

1) $AD^2 = BD \cdot DC$

2) $AB^2 = BD \cdot BC$

3) $AC^2 = CD \cdot BC$



세 선분 a, b, c에서 $a:b=b:c$ 즉 $b^2=ac$일 때 b를 a와 c의 **비례가운데마디**라고 부른다.

○ △ABC에서 BC=a, AC=b, AB=c라고 하면

1) ∠A:뾰족각⇒$b^2+c^2>a^2$

2) ∠A:무딘각⇒$b^2+c^2<a^2$

○ △ABC에서 BC=a, AC=b, AB=c라고 할 때

1) $b^2+c^2>a^2$⇒∠A:뾰족각

2) $b^2+c^2<a^2$⇒∠A:무딘각

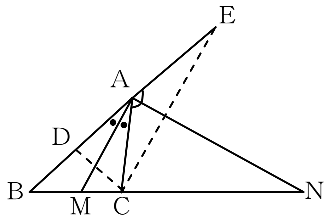
3) $b^2+c^2=a^2$⇒∠A:직각

[3각형의 안낙각과 바깥각의 2등분선의 성질]

△ABC에서

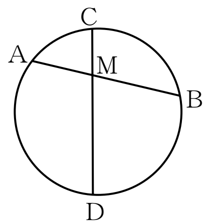
1) ∠A의 2등분선 AM⇒다른 두 변의 비로 맞은변 BC를 내분

2) ∠A의 바깥각의 2등분선 AN⇒다른 두 변의 비로 맞은변 BC를 외분



[원에서의 크기관계]

(가름선에 관한 정리) 한 원에서 두 활줄이 사귀면 그 점에서 나누인 매개 활줄의 두 부분의 적들은 서로 같다.

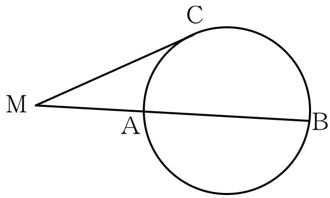


점 M에서 사귀는 두 선분 AB와 CD가 있다.

AM・MB=CM・MD이면 네 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 있다.

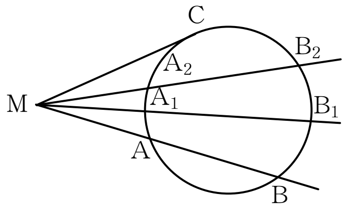
(가름선과 접선에 관한 정리)

원밖의 한 점에서 가름선을 그으면 그 점으로부터 가름선과 원둘레와의 사귐점까지 이르는 두 선분의 적은 그 점에서 그은 접선의 2제곱과 같다.



$$MA \cdot MB = MC^2$$

원밖의 한 점에서 가름선들을 그으면 그 점으로부터 매개 가름선이 원둘레와 사귀는 두 점까지 이르는 두 선분의 적들은 같다. 즉



$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = \cdots$

원 O의 가름선에서 점 M을 원밖에 잡고 원둘레에 점 C를 잡았을 때 $MA \cdot MB = MC^2$ 이면 MC는 원 O의 접선이다.

9. 3각형의 풀이

[시누스정리와 코시누스정리]

— **시누스정리**

△ABC에서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

여기서 R는 △ABC의 외접원의 반경

— **탕겐스정리**

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

– **코시누스정리**

△ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

[3각형의 풀이]

– **두 각과 한 변이 주어진 경우**(A, B, a)

$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$b = \frac{a\sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}$$

– **두 변과 그사이의 각이 주어진 경우**(a, b, C)

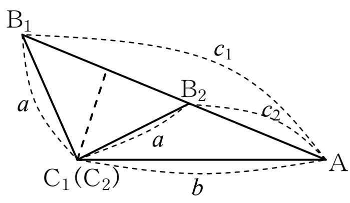
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$
$$\sin A = \frac{a\sin C}{c}$$
$$B = 180^\circ - (A + C)$$

– **두 변과 한 맞은각이 주어진 경우**(a, b, A)

○ $a > b\sin A$ 인 경우

△AB_1C_1에 대하여

$$\sin B_1 = \frac{b\sin A}{a}$$
$$C_1 = 180^\circ - (A + B_1)$$
$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A}$$



△AB_2C_2에 대하여

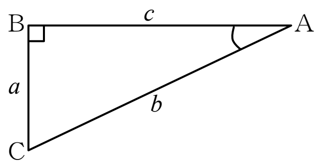
$$\sin B_2 = \frac{b\sin A}{a}$$
$$C_2 = 180^\circ - (A + B_2)$$
$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A}$$

○ $a=b\sin A$인 경우

$B=90^\circ$

$C=90^\circ-A$

$c=b\cos A$



○ $a<b\sin A$인 경우 풀이가 없다.

– **세 변이 주어진 경우**$(a,\ b,\ c)$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

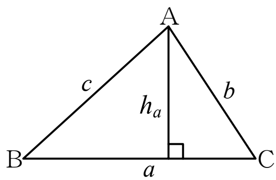
$$C=180^\circ-(A+B)$$

[3각형의 높이와 면적]

○ **높이**

$h_a=c\sin B=b\sin C=2R\sin B\sin C$

여기서 R는 △ABC의 외접원의 반경



○ **면적**

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

10. 자리길과 증명

[흔히 리용되는 자리길(기본자리길)]

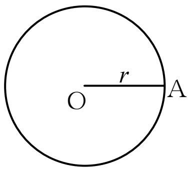
① 한 점 O로부터 r만 한 거리에 있는 점의 자리길은 원둘레 $O(r)$이다.

② 일정한 선분 a를 각 α로 보는 점의 자리길은 a를 활줄로 하고 각 α를 품는 활형의 활등이다.(끝점제외)

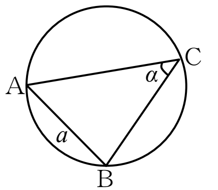
③ 일정한 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 두 점을 맺는 선분의 수직2등분선이다.

④ 각의 두 변으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 각의 2등분선이다.

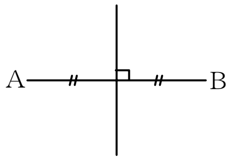
⑤ 직선 ℓ로부터 a(일정)만 한 거리에 있는 점의 자리길은 직선 ℓ로부터 a만 한 거리에 있으며 그에 평행인 두 직선이다.



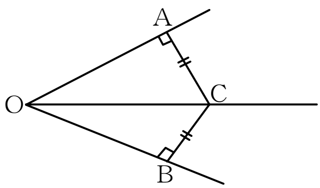
①



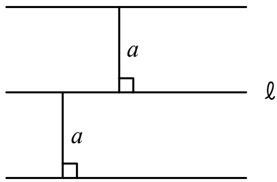
②



③



④



⑤

[자리길증명]

도형 F가 조건 q를 만족시키는 점의 자리길이라는 것을 증명하기 위해서는 다음과 같은 두가지 조건을 밝혀야 한다.

○ 조건 q를 만족시키는 점은 도형 F에 있다.

○ 도형 F에 있는 점은 조건 q를 만족시킨다.

제6장. 도형의 변환

1. 도형의 이동

[이동]

밀어옮기기⇒평행이동

돌리기⇒회전이동

접어넘기기⇒축대칭이동

[합동]

한 도형을 옮겨 다른 도형에 꼭맞게 겹치게 할수 있을 때 그 두 도형을 **합동**이라고 부른다. 두 도형 F와 F_1이 서로 합동이라는것을

$$F \equiv F_1$$

와 같이 표시한다.

합동인 두 도형 F와 F_1에서 두 도형을 꼭맞게 겹쳐놓을 때 서로 겹치게 되는 두 점을 서로 **대응하는 점**이라고 부른다.

합동인 두 도형에서 대응하는 선분, 대응하는 각은 각각 서로 같다.

2. 도형의 늘이기와 줄이기

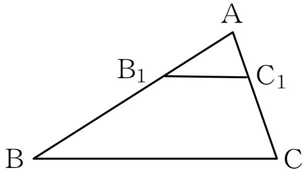
[3각형에서의 비례선분]

○ 3각형 ABC에서 한 변에 평행인 직선

· $\triangle ABC$에서 $B_1C_1 /\!/ BC$이면

1) $\dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$

2) $\dfrac{AB_1}{B_1B} = \dfrac{AC_1}{C_1C}$



○ **3각형의 두 변을 같은 비로 나누는 직선**

$\triangle ABC$에서 $\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}$이면 $B_1C_1 \parallel BC$

[도형의 늘이기와 줄이기]

일반적으로 도형 F의 임의의 두 점사이의 거리를 2배로 늘여서 도형 F_1을 얻었다면 도형 F_1은 도형 F를 2배로 **늘인 도형**이라고 부르며 $\frac{1}{2}$로 줄여서 도형 F_1을 얻었다면 F_1은 도형 F를 $\frac{1}{2}$로 **줄인 도형**이라고 부른다.

도형 F의 임의의 두 점 A, B와 그에 대응하는 F_1의 점들을 각각 A_1, B_1로 표시하면

$A_1B_1=2AB \Rightarrow F_1$은 F를 2배로 늘인 도형

$AB=\frac{1}{2}A_1B_1 \Rightarrow$ F는 F_1를 $\frac{1}{2}$로 줄인 도형

도형을 늘이거나 줄일 때 각의 크기는 달라지지 않는다.

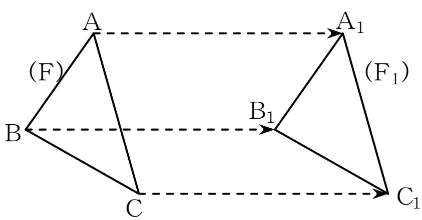
어떤 도형의 늘인 도형이나 줄인 도형을 그릴 때에는 그 도형을 테두리만 그리면 된다.

3. 평행이동과 회전이동

[평행이동]

· 평행이동에서 도형의 모든 점은 같은 방향으로 같은 거리만큼 옮겨간다.

· 평행이동에서 선분은 그에 평행이며 그와 길이가 같은 선분으로 넘어간다.



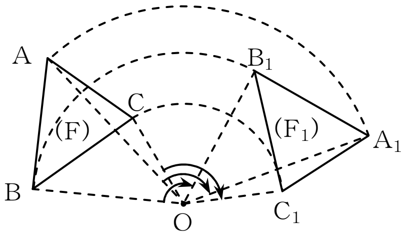
[회전이동]

· 회전이동에서 도형의 모든 점은 정해놓은 점을 중심으로 하여 정해진 각만큼 옮겨간다.

· 회전이동에서 선분은 길이가 같은 선분으로 옮겨간다.

여기서 정해놓은 점을 **회전중심**, 정해진 각을 **회전각**이라고 부른다. 도형을 회전이동하려면 회전중심과 회전각을 알아야 한다.

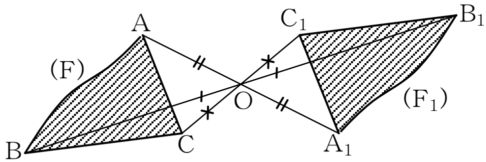
도형을 회전이동할 때도 도형의 점들은 모두 회전중심을 중심으로 하는 원둘레들을 따라 같은 각만큼 옮겨간다.



[점대칭이동]

회전각이 180°인 회전이동을 **점대칭이동**이라고 부른다.

이때 회전중심을 **대칭중심**이라고 부른다.



점대칭이동에서 대칭중심은 서로 대응하는 두 점을 맺는 선분의 가운데점으로 된다. 그림에서 도형 F와 F_1은 점 O에 관하여 서로 **점대칭**이라고도 말한다.

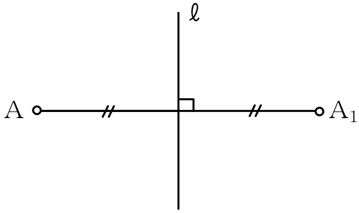
서로 점대칭인 두 도형 F와 F_1은 합동이다. 즉 도형 F가 점 O를 중심으로 하는 점대칭이동에서 자기자체와 꼭맞게 겹쳐지면 도형 F를 **점대칭도형**이라고 부른다.

이때 점 O를 도형 F의 **대칭중심**이라고 부른다.

4. 축대칭이동

[축대칭이동]

두 점 A, A_1을 맺는 선분이 직선 ℓ에 의하여 수직으로 2등분될 때 두 점 A, A_1은 직선 ℓ에 관하여 서로 **대칭**이라고 말하며 직선 ℓ을 **대칭축**이라고 부른다.



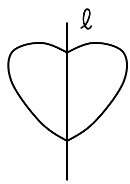
도형의 축대칭이동은 도형의 모든 점을 한 직선 ℓ에 관한 그것의 대칭점으로 옮기는 이동이다.

도형 F를 축대칭이동하여 얻은 도형을 F_1이라고 할 때 도형 F와 F_1은 직선 ℓ에 관하여 서로 대칭이라고 말한다.

서로 축대칭인 두 도형 F와 F_1은 합동이다. 즉

$$F \equiv F_1$$

[축대칭도형]



축대칭이동에 의하여 자기자체와 꼭맞게 겹쳐지는 도형을 **축대칭도형**이라고 부르며 이때 대칭축을 도형의 **대칭축**이라고 부른다.

5. 중심닮음변환과 닮음변환

[중심닮음변환]

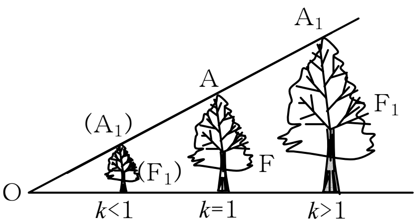
평면에 한 점 O와 정수 k가 정해졌을 때 도형 F의 매 점 A를 반직선 OA에서 $OA_1 = kOA$로 되는 점 A_1로 넘기는것을 점 O를 **닮음중심**으로 하고 수 k를 **중심닮음비**로 하는 **중심닮음변환**이라고 부른다.

그리고 이것을 간단히 중심닮음변환 (k, O)로 표시한다.

여기서 $k>1$이면 F_1은 F를 k배로 늘인 도형

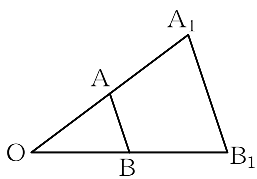
$k<1$이면 F_1은 F를 k배로 줄인 도형

$k=1$이면 F_1은 F와 일치하는 도형이다.



[중심닮음변환의 성질]

· 중심닮음변환에 의하여 선분은 그에 평행인 선분으로 넘어가며 이 선분의 주어진 선분에 대한 비는 중심닮음비와 같다.



$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k$$

· 중심닮음변환에 의하여 반직선(직선)은 그에 평행인 반직선(직선)으로 넘어간다.

· 중심닮음변환에 의하여 각은 같은 크기의 각으로 넘어간다.

중심닮음변환에 의하여 도형 F가 F_1로 넘어가면 F와 F_1은 닮고 그 닮음비는 중심닮음비와 같다.

[닮음도형의 둘레와 면적]

· 닮은 두 다각형의 둘레의 비는 닮음비와 같다.

· 닮은 두 다각형의 면적의 비는 닮음비의 2제곱과 같다.

6. 도형의 변환

[도형의 변환]

평면에서 평행이동, 회전이동, 축대칭이동과 같이 평면의 모든 점모임을 평면의 점모임으로 넘기는 1:1우로의 넘기기를 **변환**이라고 부른다.

어떤 변환 f에 의하여 어떤 도형 F가 다른 도형 F_1로 넘어갔다고 하자.

이때 f를 F의 도형 F_1에로의 변환이라고 부를 때도 있다.

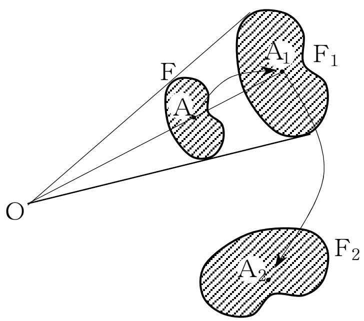
도형 F를 그와 합동인 도형으로 넘기는 변환을 **합동변환**이라고 부르고 그와 닮은 도형으로 넘기는 변환을 **닮음변환**이라고 부른다.

합동변환은 크기와 모양을 변하지 않게 하는 변환이고 닮음변환은 크기는 변할수 있으나 모양은 변하지 않게 하는 변환이다.

[변환의 합성]

도형 $F_1 \equiv F_2$, $F \backsim F_2$이면 합동변환과 중심닮음변환을 적당히 하여 F를 F_2로 넘길수 있다.

이렇게 하는것을 **변환의 합성**이라고 한다.

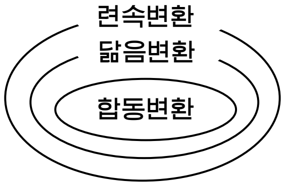


[련속변환]

일반적으로 면들, 선들의 이어진 상태가 그대로 있는 변환을 **련속변환**이라고 부른다. 여기서 면과 선들의 크기와 모양은 달라져도 좋고 달라지지 않아도 좋다.

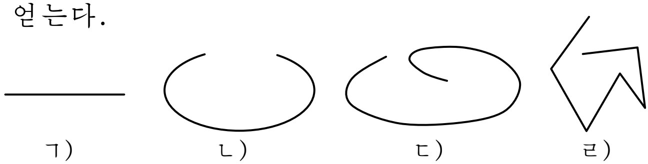
○ **합동변환, 닮음변환, 련속변환사이의 관계**

(련속변환의 모임)⊃(닮음변환의 모임)⊃(합동변환의 모임)



[선분의 련속변환]

선분을 련속변환하면 그림과 같은 여러가지 모양의 선을 얻는다.

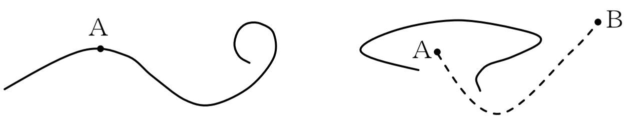


선 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다.

이런 선들의 그 모양과 길이는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 같다.

① 벌어진 선이다.

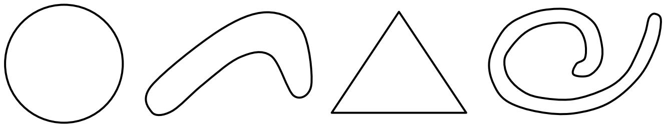
② 이 선을 한 점에서 끊으면 두 부분으로 나누어진다.



③ 평면에서 이런 선은 평면을 두 부분으로 나누지 않는다. 선에 놓이지 않는 임의의 두 점 A, B도 선과 만나지 않는 선으로 그을수 있다.

[원둘레의 련속변환]

원둘레를 련속변환하면 다음과 같은 여러가지 모양의 도형을 얻을수 있다.



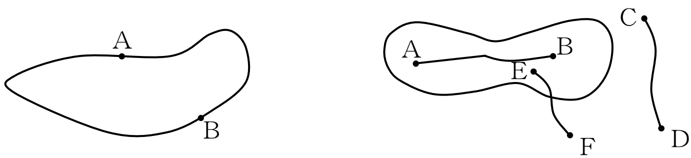
ㄱ)　　ㄴ)　　ㄷ)　　ㄹ)

선 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다.

이런 선들은 그 모양과 길이는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 다문선이다.

② 이 선은 한 점에서 끊어도 두 부분으로 나누어지지 않는다. 두 점에서 끊어야 두 부분으로 나누어진다.

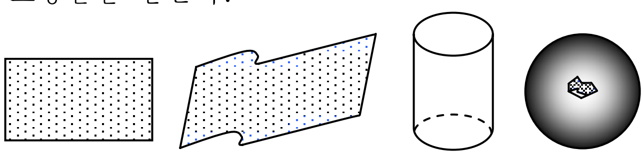


③ 평면에서는 다문선에 의하여 평면이 아낙과 바깥으로 나누어진다. 아낙점과 바깥점을 맺는 선은 반드시 이 선과 만난다.

[면의 련속변환]

○ **바른4각형의 련속변환**

바른4각형을 련속변환하면 그림과 같은 여러가지 모양의 도형들을 얻는다.



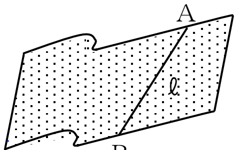
ㄱ)　　ㄴ)　　ㄷ)　　ㄹ)

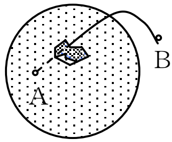
면 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 면들은 그 모양과 크기는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 벌려져있는 면이다.

② 도중에서 자기끼리 만나지 않는다.

③ 이 면을 그림과 같이 그 둘레의 두 점을 맺는 선을 따라서 한번 자르면 두 부분으로 나누인다.

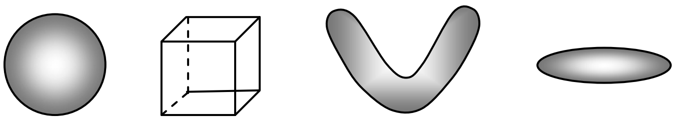




④ 이런 면은 공간을 두 부분으로 나누지 않는다. 면에 놓이지 않는 임의의 두 점 A, B도 그 면과 만나지 않는 선으로 그을수 있다.

○ **구면의 련속변환**

구면을 련속변환하면 다음과 같은 여러가지 모양의 도형을 얻는다.



ㄱ) ㄴ) ㄷ) ㄹ)

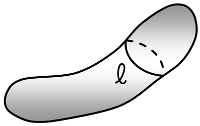
면 ㄱ), ㄴ), ㄷ), ㄹ)들은 모두 어느 하나를 다른것들로 련속변환할수 있는것들이다. 이런 면들은 그 모양과 크기는 다를수 있으나 다음과 같은데서는 다 같다.

① 다물어져있는 면이다.

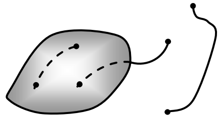
② 도중에서 자기끼리 만나지 않는다.

③ 이 면을 그림과 같이 그우에 있는 다문선 ℓ을 따라서 한번 자르면 두 부분으로 나누어진다.

④ 이런 면에 의하여 공간은 아낙과 바깥으로 나누어진다. 아낙점과 바깥점을 맺는 선은 반드시 이 면과 만난다.

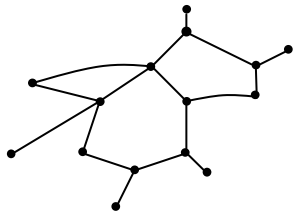


ㄱ)



ㄴ)

[그라프]

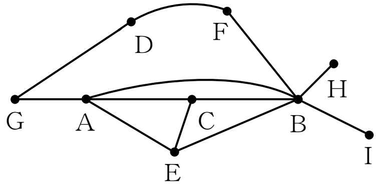


그림과 같이 선분들이 이어져 그물모양으로 된 도형을 **그라프**라고 부른다.

여기서 정점, 선토막을 각각 **마디점**, **마디**라고 부른다.

그라프라고 하면 보통의 경우는 련결되여있는것을 생각한다.

그림과 같이 그라프에서 마디점 A로부터 B로 가는 《길》은 여러개 있을수 있다.



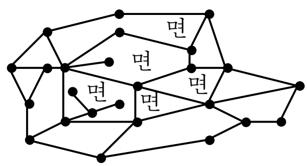
실례로 길 ACB, AEB, AB 등은 다 길이다.

길가운데서 길 AEBCA와 같이 제자리로 돌아오는 길을 **다문길**이라고 부른다.

다문길이 없는 그라프를 **나무**라고 부른다.

나무에서 마디점의 수를 m, 마디의 수를 n이라고 하면 늘

$m-n=1$이다.



그림과 같이 어떤 면에 놓인 그라프에서 마디에 의하여 둘러막힌 평면의 유한부분을 그라프의 **면**이라고 부를 때도 있다.

[오일레르특성수]

평면에 놓인 그라프에서 마디점의 수를 m, 마디의 수를 n, 면(구역)의 수를 p라고 하면

$$m-n+p=1$$

일반적으로 다문면에서 $m-n+p$를 **오일레르특성수**라고 부른다.

상식

소문난 소경원사
뽄뜨랴긴(1908-1988, 로씨야)

뽄뜨랴긴은 어려서부터 기억력이 좋아 한번 보거나 들은것은 그대로 기억하였다고 한다. 그는 13살 때 폭발사고로 두눈을 잃었다. 그의 어머니가 뽄뜨랴긴에게 책을 읽어주면서 공부시키였다. 눈뜬 사람도 3차원공간까지는 직접 파악할수 있지만 4차원공간부터는 파악하기 힘들다. 그런데 소경인 뽄뜨랴긴은 다차원공간도 3차원공간과 같이 선명한 표상을 가지고있었다고 한다.

그는 《위상군》이라는 유명한 책을 썼는데 얼마나 잘되여있는지 눈뜬 사람들이 부끄러움을 느낄 정도였다고 한다. 그는 이 책을 쓰고 쓰딸린상을 받았고 세계 여러 나라에 번역되여갔다. 그는 상미분방정식론, 자동조종론에서도 특출한 공적을 쌓았다.

뽄뜨랴긴이 1970년 프랑스의 니스에서 열린 제16차국제수학자대회에서 중요한 보고를 하고 휴식시간이 되였을 때이다. 대회에 참가한 수학자들이 그를 둘러싸고 존경어린 시선으로 뽄뜨랴긴을 바라보고있었는데 《아니, 눈뜬 사람도 수학에서 성공하기가 쉽지 않은데 선생님은 소년시절에 실명하고도 어떻게 그처럼 큰 성공을 할수가 있었습니까?》하는 질문이 들어왔다. 뽄뜨랴긴은 웃으면서 천천히 대답하였다.

《여러분, 수학은 눈으로가 아니라 머리로 연구하는 학문입니다.》

뽄뜨랴긴은 이전 쏘련의 원사, 교수, 박사이고 로력영웅이였다.

제7장. 공간도형

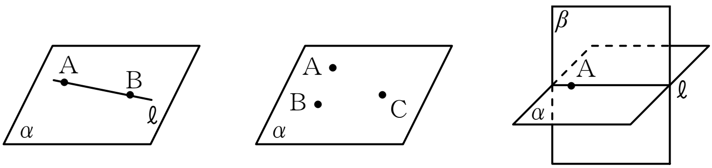
1. 공간에서 직선과 평면

[공간도형의 기초명제]

· 직선의 두 점이 평면에 놓이면 직선은 그 평면에 완전히 놓인다.

· 한 직선에 놓이지 않는 세 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나 있다.

· 두 평면이 하나의 공통점을 가지면 그 평면들은 그 공통점을 지나는 한 직선에서 사귄다.



$\ell \subset \alpha$ $\alpha \cap \beta = \ell$

※ 한 직선에 놓이는 세 점을 지나는 평면은 무수히 많다.

[평면의 결정조건]

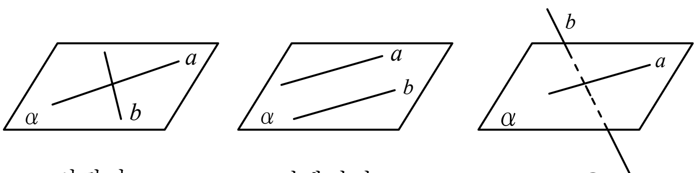
· 한 직선에 놓이지 않는 세 점

· 직선과 그밖의 한 점

· 평행인 두 직선

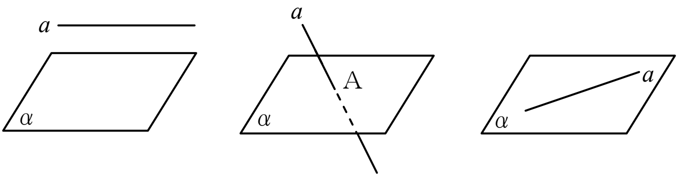
· 사귀는 두 직선

[공간에서 두 직선의 자리관계]



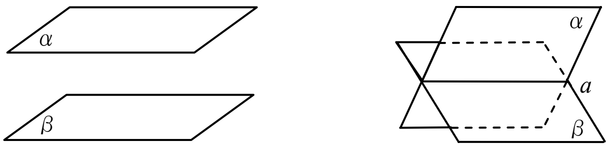
사귄다 평행이다 어긴다($a \cap b = \phi$)

[직선과 평면의 자리관계]



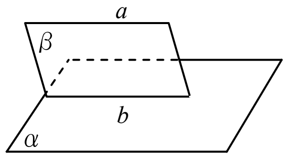
평행이다($a/\!/\alpha$)　　사귄다($a\cap\alpha=\{A\}$)　평면 α에 놓인다($a\subset\alpha$)

[두 평면의 자리관계]



평행이다($\alpha/\!/\beta$)　　사귄다($\alpha\cap\beta=a$)

[직선 및 평면의 평행]

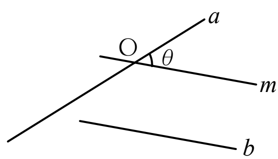


· 직선 a가 평면 α와 평행이고 a를 지나는 평면 β와 α와의 사귐선이 b이면 a는 b와 평행이다.

· 평면 α 밖에 있는 직선 a가 평면 α에 놓여있는 직선 b와 평행이면 직선 a는 평면 α와 평행이다.

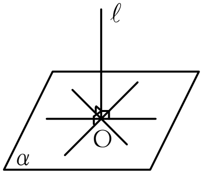
[직선 및 평면의 수직]

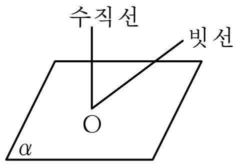
두 직선 a와 b가 어길 때 어느 한 직선 a의 한 점 O를 지나 b에 평행인 직선 m을 그었을 때 생기는 각 θ를 어기는 두 직선 a, b사이의 **각**이라고 부르고 $\angle(a, b)$로 표시한다. 그리고 $\angle(a, b)=\angle R$ 일 때 a와 b는 **수직**이라고 부른다.



· 직선 ℓ이 평면 α에 놓이는 모든 직선과 수직일 때 ℓ은 α와 **수직**이라고 부른다.

· 직선 ℓ이 평면 α와 수직일 때 ℓ은 α의 **수직선**, 그렇지 않을 때 ℓ은 α의 **빗선**이라고 부른다.



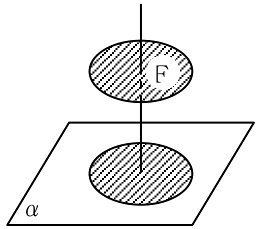


[바른사영]

· 평면 α에 평행광선을 수직으로 비쳤을 때 평면 α에 나타난 도형 F의 그림자를 도형 F의 평면 α에 던진 **바른사영**이라고 부르고

《사영 $_{\alpha}$ F》 또는 $P_{r_\alpha}F$

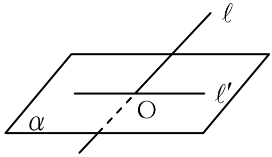
와 같이 표시한다.



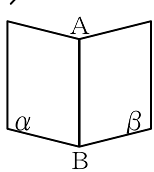
이때 평면 α를 **사영면**이라고 부른다.

[직선과 평면사이의 각]

빗선 ℓ의 평면 α에 던진 바른 사영을 ℓ'라고 할 때 ℓ과 ℓ'가 이루는 각을 직선 ℓ과 평면 α가 이루는 **각**이라고 부른다.



평면에 놓인 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나눈다. 이때 매 부분을 **반평면**이라고 부른다.



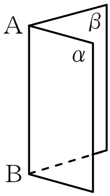
[두 평면사이의 각]

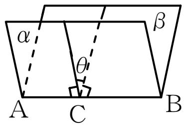
한 직선으로부터 나가는 2개의 반평면과 그사이에 낀 공간부분을 **2면각**이라고 부른다.

여기서 공통직선을 2면각의 **모서리**, 반평면을 2면각의 **면**이라고 부른다.

모서리가 AB이고 면이 α, β인 2면각을 《2면각 AB》 또는 《2면각 $\alpha AB\beta$》와 같이 표시한다.

2면각의 모서리에서 임의로 한 점 C를 잡고 C를 지나서 모서리에 수직인 반직선을 매 면에 그었을 때 이 두 반직선이 만드는 각은 일정하다. 이 각을 주어진 2면각의 **평면각**이라고 부른다.



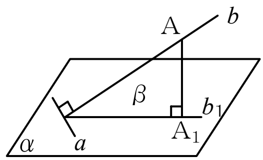


2면각의 크기는 그 2면각의 평면각의 크기로 표시한다.

두 평면이 이루는 2면각의 평면각을 두 평면사이의 **각**이라고 부른다.

두 평면사이의 각이 직각일 때 두 평면은 서로 **수직**이라고 부른다.

[세 수직선의 정리]



· 사영면 α에 놓인 직선 a가 빗선 b와 수직이면 직선 a는 빗선의 바른사영 b_1과도 수직이다.

· 사영면 α에 놓인 직선 a가 빗선 b의 바른사영 b_1과 수직이면 직선 a는 빗선 b와도 수직이다.

2. 다면체

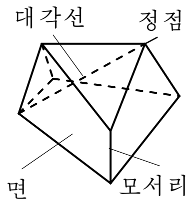
[다면체]

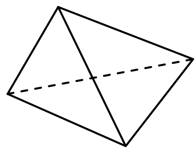
몇개의 다각형으로 둘러막힌 공간의 부분을 **다면체**라고 부른다.

다면체를 이루는 다각형을 그 다면체의 면, 면들이 사귀는 공통변을 모서리, 모서리들의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

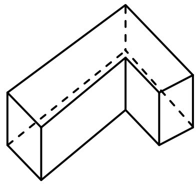
한 면에 들어있지 않는 두 정점을 맺는 선분을 그 다면체의 **대각선**이라고 부른다.

다면체의 임의의 두 점을 맺는 선분이 늘 다면체에 들어있을 때 그 다면체를 **볼록다면체**, 그렇지 않으면 **오목다면체**라고 부른다.





볼록다면체



오목다면체

다면체라고 하면 볼록다면체를 말하는것으로 한다.

면이 n개인 다면체를 **n면체**라고 부른다.

다면체에서 면의 수가 가장 적은것은 4면체이다.

따라서 n면체라고 할 때 $n \geq 4$이다.

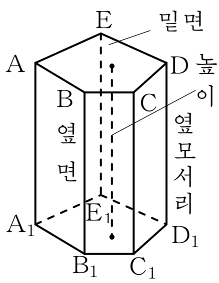
다면체들가운데서 모든 면들이 합동인 바른다각형이고 매 정점에서 나가는 모서리의 수가 같은 다면체를 **바른다면체**라고 부른다.

바른다면체에는 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체, 바른20면체 다섯가지만 있다.

[각기둥]

두 면은 평행이고 다른 면들은 모두 한 직선에 평행인 다면체를 **각기둥**이라고 부른다.

여기서 평행인 두 면을 각기둥의 **밑면**, 한 직선에 평행인 면들을 각기둥의 **옆면**이라고 부른다.



두 옆면의 공통변을 각기둥의 **옆모서리**, 두 밑면사이의 거리를 각기둥의 **높이**라고 부른다.

밑면의 변이 n개인 각기둥을 **n각기둥**이라고 부른다.

두 밑면이 다각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$인 각기둥을 각기둥 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$로 표시한다.

— **각기둥의 성질**

· 옆모서리들은 서로 평행이다.

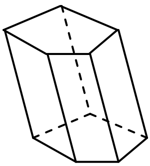
· 옆면들은 평행4변형이다.

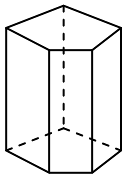
· 두 밑면은 합동이다.

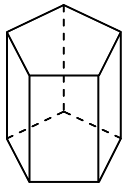
옆모서리가 밑면에 수직인 각기둥을 **직각기둥**, 수직이 아닌 각기둥을 **빗각기둥**이라고 부른다.

특히 밑면이 바른다각형인 직각기둥을 **바른각기둥**이라고 부른다.

각기둥에서 한 옆면에 놓이지 않는 두 옆모서리를 지나는 평면의 자름면을 그 각기둥의 **대각선면**이라고 부른다.

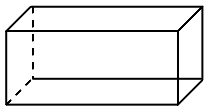

빗각기둥


직각기둥

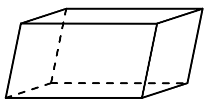

바른각기둥

[평행6면체]

밑면이 평행4변형인 각기둥을 **평행6면체**라고 부른다.


직평행6면체

평행6면체들가운데서 옆모서리가 밑면에 수직인것을 **직평행6면체**, 수직이 아닌것을 **빗평행6면체**라고 부른다.


빗평행6면체

특히 밑면이 직4각형인 직평행6면체를 **직6면체**라고 부른다.

바른6면체는 모서리들이 다 같은 직6면체이다.
평행6면체의 모든 면은 평행4변형이다.
직평행6면체의 옆면들은 직4각형이다.
직6면체의 모든 면은 직4각형이다.
바른6면체의 모든 면은 합동인 바른4각형이다.

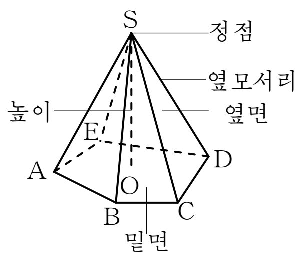
— **평행6면체의 성질**

· 맞은면들은 평행이며 합동이다.

· 대각선들은 모두 한 점에서 사귀고 그 점에서 2등분된다.

[각뿔]

다각형과 다각형평면밖의 한 점을 다각형의 정점들과 맺어서 얻은 3각형들을 면으로 하는 다면체를 **각뿔**이라고 부른다.



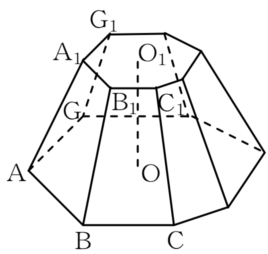
여기서 다각형을 각뿔의 **밑면**, 한 점을 각뿔의 **정점**, 3각형들을 각뿔의 **옆면**, 정점과 밑면의 정점들을 맺는 선분들을 각뿔의 **옆모서리**, 정점에서 밑면까지의 거리를 **높이**라고 부른다.

정점이 S이고 밑면이 다각형 ABCDE인 각뿔을 각뿔 S－ABCDE로 표시한다.

밑면의 변이 n개인 각뿔을 n**각뿔**이라고 부른다.

밑면이 바른다각형이고 옆모서리의 길이가 모두 같은 각뿔을 **바른각뿔**이라고 부른다.

[각뿔대]



각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 밑면과 자름면사이의 부분을 **각뿔대**라고 부른다. 여기서 평행인 두 면을 각뿔대의 **밑면**, 나머지면

들을 각뿔대의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 각뿔대의 **높이**라고 부른다.

바른각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **바른각뿔대**라고 부른다.

n각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **n각뿔대**라고 부른다. 밑면이 $ABC\cdots G$, $A_1B_1C_1\cdots G_1$인 각뿔대를 각뿔대 $ABC\cdots G-A_1B_1C_1\cdots G_1$로 표시한다.

각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면

· 자름면은 밑면과 닮은 다각형이다.

· 자름면과 밑면의 면적의 비는 정점으로부터 그 면까지의 거리의 2제곱과의 비와 같다.

상식

만능수학자 오일레르
(1707-1783, 스위스)

오일레르를 보고 사람들은 《세계최초의 그리고 세계최대의 만능수학자》, 론문을 가장 많이 쓴 수학자라고 말하고있다.

오일레르는 천성이 온순하고 총명하였고 아버지가 주는 학습과제를 수행하기 위하여 날마다 부지런히 공부하였다. 그의 뛰여난 상상력과 사고력, 예민한 감수력, 수수께끼와 같은 기억력, 왕성한 탐구정신과 강한 의지는 사람들을 놀라게 하였다. 오일레르는 일생동안 886건의 론문을 썼는데 두눈이 먼 다음 마지막 17년동안 400건의 론문을 내놓았다.

오일레르는 눈이 먼 다음에도 집필을 그전보다 더 높은 속도로 진행하였다고 한다. 그는 보통교육부문의 교과서 《산수》, 《지리》, 《대수》의 집필자이기도 하였다. 그는 과학연구에서 모험을 두려워하지 않았다. 오일레르는 1783년 9월 18일에 제자들과 2년전에 발견한 천왕성에 대한 이야기를 하면서 그 자리길의 계산방법을 론의하다가 졸도하였다. 당시 신문에는 《계산을 중지하는것과 함께 그의 생이 끝났다.》고 썼다.

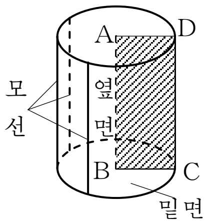
3. 회전체

[회전체]

다문선으로 둘러싸인 평면도형 F가 있다. 이 평면도형이 놓여있는 평면 α를 평면의 한 직선 ℓ주위로 회전시킬 때 평면도형이 만드는 도형을 **회전체**라고 부른다.

[원기둥]

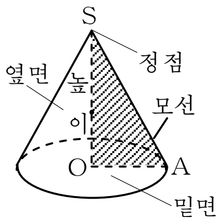
직4각형을 그 한 변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 **직원기둥**이라고 부르고 이것을 간단히 **원기둥**이라고 부른다.



여기서 축에 수직인 변이 그리는 면(원)을 원기둥의 **밑면**, 축에 평행인 선을 원기둥의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원기둥의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 원기둥의 **높이**라고 부른다.

원기둥을 축에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 직4각형이다.

[원뿔]



직3각형을 그 한 직각변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 **직원뿔**이라고 부르고 간단히 **원뿔**이라고 부른다.

여기서 축에 수직인 직각변이 그리는 면을 원뿔의 **밑면**, 빗변을 원뿔의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원뿔의 **옆면**, 정점에서 밑면까지의 거리를 원뿔대의 **높이**라고 부른다.

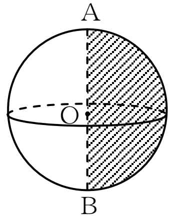
원뿔을 정점을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 2등변3각형이다.

[원뿔대]

원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 자름면과 밑면사이의 부분을 **원뿔대**라고 부른다.

[구]

반원을 그 직경을 축으로 하여 한바퀴 회전시켰을 때 생기는 회전체를 **구**라고 부른다. 이때 반원둘레가 그리는 면을 **구면**이라고 부른다.



여기서 반원의 활줄의 가운데점을 구의 **중심**, 구의 중심과 구면의 한 점을 맺는 선분을 구의 **반경**, 구의 중심을 지나는 직선이 구면과 사귀여 생기는 선분을 구의 **직경**이라고 부른다.

구를 평면으로 자르면 자름면은 원이다.

구를 중심을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **큰 원**, 중심을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **작은 원**이라고 부른다.

구를 한 평면으로 잘랐을 때 생기는 구의 매 부분을 **결구**라고 부르며 자름면을 결구의 **밑면**, 결구의 밑면에 수직인 직경에서 결구안에 든 선분을 결구의 **높이**라고 부른다.

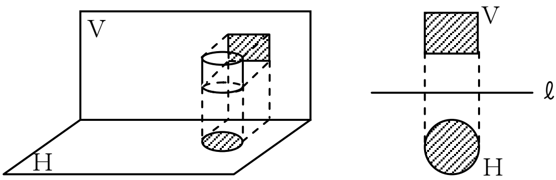
그리고 결구에서 구면부분을 **구관(구면갓)**이라고 부르며 구를 평행인 두 평면으로 잘랐을 때 평행평면사이에 끼워있는 구의 부분을 **구대**, 두 자름면을 구대의 **밑면**, 밑면사이의 거리를 구대의 **높이**라고 부른다.

4. 도형의 투영

[투영]

공간도형을 평면에 나타내는데 바른사영을 쓴다.

이때 한 평면의 사영만 가지고서는 도형의 생김새와 크기를 알아볼수 없으므로 서로 수직인 두 평면(또는 세 평면)의 사영을 함께 그린다.

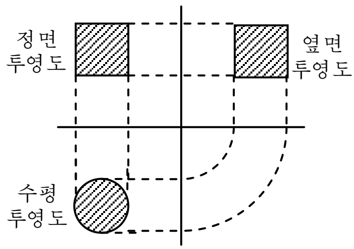


그림에서 H면을 **수평투영면**, V면을 **정면투영면**이라고 부른다.

그림은 원기둥을 H면과 V면에 바른사영을 한 다음 한 면을 사귐선 ℓ주위로 90° 만큼 돌려서 두 사영이 한 평면에 놓이도록 한것을 보여준다.

이렇게 하여 얻은 사영을 **투영도**라고 부른다.

이때 H면의 투영도는 **수평투영도**, V면의 투영도는 **정면투영도**라고 부르고 ℓ을 **투영축**이라고 부른다.

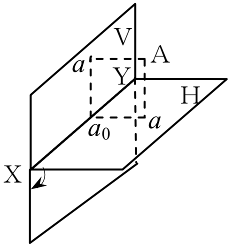


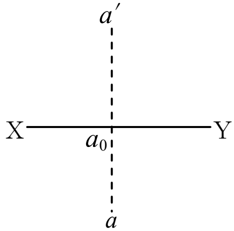
필요에 따라 투영축 ℓ에 수직인 평면에 바른사영을 나타내야 할 때도 있다. 이때 투영축에 수직인 평면을 **옆면투영면**, 그 면에 표시한 바른사영을 **옆면투영도**라고 부른다.

[점의 투영도]

점 A의 수평투영면 H, 정면투영면 V의 사영을 각각 a, a'라고 하자.

a, a'는 각각 점 A의 수평투영도, 정면투영도이다.





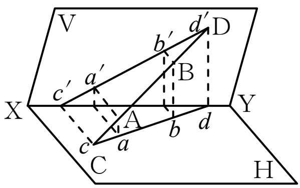
· 점 A의 투영도에서 직선 aa' 는 투영축 XY에 수직이다.

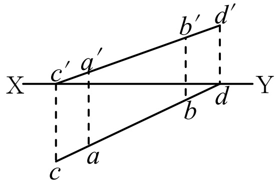
· 투영도에서 aa_0 은 점 A에서 정면투영면까지의 거리를 나타내고 $a'a_0$ 은 점 A에서 수평투영면까지의 거리를 나타낸다.

[직선의 투영도]

직선의 한 평면에로의 바른사영은 그 직선의 두 점의 바른사영을 지나는 직선이다.

그러므로 직선 AB의 수평투영은 두 점 A, B의 수평투영도 a, b를 지나는 직선이고 정면투영도는 두 점 A, B의 정면투영도 a', b'를 지나는 직선이다.





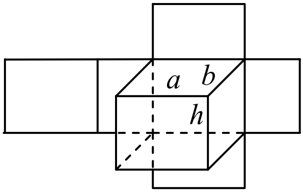
[립체의 투영도]

다면체는 다각형으로 둘러막혀있고 그 면들의 경계는 모서리들이므로 다면체의 투영도를 그리는것은 그 모서리들의 투영도를 그리는것에 귀착된다.

이때 투영면을 향해서 직접 보이는 모서리는 실선《——》으로, 뒤쪽에 있어서 보이지 않는 모서리는 점선《-----》으로 나타낸다.

5. 립체의 겉면적과 체적

[직6면체의 옆면적과 겉면적, 체적]



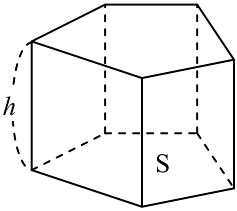
$S_{옆}=(2a+2b)h$

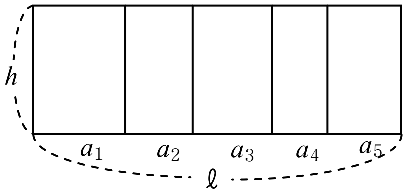
$S_{겉}=(2a+2b)h+2ab$

$V=abh$

[직각기둥의 옆면적과 겉면적, 체적]

밑면적이 S이고 높이가 h일 때



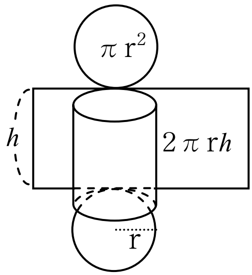


$S_{옆}=h\ell \quad (\ell=a_1+a_2+\cdots+a_5)$

$S_{겉}=h\ell+2S$

$V=Sh$

[원기둥의 옆면적과 겉면적, 체적]



$S_{옆}=2\pi rh$

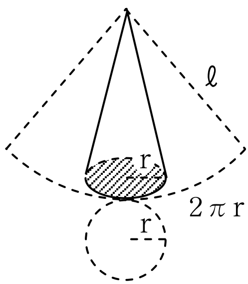
$S_{겉}=2\pi rh+2\pi r^2$

$=2\pi r(h+r)$

$V=\pi r^2 h$

[원뿔의 옆면적과 겉면적, 체적]

반경이 r이고 모선의 길이가 ℓ, 높이가 h일 때



$S_{옆}=\dfrac{\ell\times 2\pi r}{2}=\pi r\ell$

$S_{겉}=\pi r\ell+\pi r^2=\pi r(\ell+r)$

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

[구의 겉면적과 체적]

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

상식

열정의 수학자 아르키메데스
(B.C. 287 – B.C. 212, 고대그리스)

아르키메데스는 원의 면적공식 $S=\pi r^2$, 구의 겉면적공식 $S=4\pi r^2$, 체적공식 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$을 발견하였으며 오늘날의 적분법의 맹아를 제기하였다. 아르키메데스는 어려서부터 수학문제풀이를 즐겨했는데 여기에 열중하던 나머지 끼니를 잊은적이 많았다고 한다. 그는 어려서부터 사물현상을 세밀히 관찰하고 그 리치를 파고드는 습성이 있었다고 한다.

아르키메데스는 마루바닥에 모래를 펴놓고 거기에 선을 그어가면서 기하공부를 하였고 목욕을 하고나서 몸에 기름을 바른 다음에는 옷을 입는것도 잊고 자기 몸에 손톱으로 그림을 그리면서 사색을 이어가기도 하였다. 이러한 사색이 짙어지는 과정에 새로운 수학적발견이 련방 쏟아져나왔고 후에는 이름난 수학자로 되였던것이다.

제8장. 모임과 론리

1. 모임

[모임]

모임개념은 수학의 시초개념(정의하지 않는 개념)의 하나이다.

모임개념을 잘못 사용하면 모순을 일으키는 경우가 많으므로 일정한 약속을 하여 사용하게 된다.

수학에서 모임이라고 하면 무엇이든지 그 모임에 드는가, 들지 않는가 하는 기준이 명백한것만을 생각한다.

［례］ 자연수전부의 모임, 12의 정의 약수들의 모임 등은 기준이 명백하므로 수학적모임으로 된다. 그러나 큰 수들의 모임, 키가 작은 나무들의 모임, 긴 강들의 모임 등은 기준이 명백치 않으므로 수학적모임이 아니다.

[모임의 원소]

모임을 이루는 하나하나의 대상을 그 **모임의 원소**라고 부른다.

모임을 표시하는 말에는 총체, 전부, 족, 계 등이 있다.

이런 의미에서 모임은 일반성을 띤다.

모임을 큰 글자 A, B, C …로, 모임의 원소는 작은 글자 a, b, c,… 등으로 표시한다.

《a가 모임 A의 원소이다.》, 《원소 a가 모임 A에 속한다.》라는것을 $a \in A$ 또는 $A \ni a$로 표시한다.

그리고 《a가 모임 A의 원소가 아니다.》, 《원소 a가 모임 A에 속하지 않는다.》는것을 $a \notin A$ 또는 $A \not\ni a$로 표시한다.

［례］ N:자연수모임, Z:옹근수모임, Q:유리수모임, R:실수모임, C:복소수모임이라고 할 때 $2\in \mathrm{N}$, $-3\notin \mathrm{N}$, $-2\in \mathrm{Z}$, $\sqrt{2}\notin \mathrm{Z}$, $\frac{2}{3}\in \mathrm{Q}$, $\pi\notin \mathrm{Q}$, $e\in \mathrm{R}$, $1+i\notin \mathrm{R}$, $2-3i\in \mathrm{C}$

[모임의 표시]

모임의 원소들을 다 늘여놓고 { }를 써서 표시하는 방법을 **렬거법**이라고 한다. 렬거법은 모임의 모든 원소들의 특징을 알기 위해 필요하다.

［례］ 짝수전부의 모임 $Z_{짝}=\{2, 4, 6, \cdots\}$

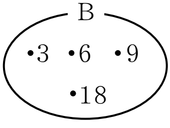
모임의 원소들이 가지고있는 성질, 특징을 밝혀 하나의 간단한 기호로 표시하는 방법을 **조건표시법**이라고 부른다. 표시는 $\{x|p(x)$, x는 p라는 성질을 가진다.$\}$

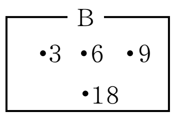
［례］ A={5, 10, 15, 20, …}라고 할 때

$$\mathrm{A}=\{x|x\text{는 5의 배수}\}$$

모임의 원소들을 어떤 다문곡선(원 또는 직4각형)안의 점으로 표시하는 방법을 그림에 의한 표시법 또는 **벤의 표시법**이라고 부른다.

［례］ B를 3의 배수이면서 18의 약수로 되는 모임이라면





로 표시할수 있다.

주의. 렬거법과 벤의 표시법이 모임표시법의 구체성을 가진다면 조건표시법은 일반성을 가진다.

[유한모임과 무한모임]

원소의 개수가 유한인 모임을 **유한모임**, 유한모임이 아닌 모임을 **무한모임**이라고 부른다.

［례］ 15의 약수들의 모임은 유한모임이다.

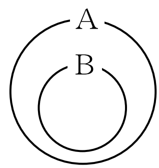
정의 짝수들의 모임은 무한모임이다.

[빈모임]

하나의 원소도 가지지 않는 모임을 **빈모임**이라고 부르고 기호 ϕ로 표시한다. 빈모임은 유한모임으로 본다.

［례］ 3개의 약수를 가진 씨수들의 모임은 빈모임이다.

[부분모임]



모임 B의 매개 원소가 다 모임 A에 들면 B를 A의 **부분모임**이라고 부르고 $B\subset A$로 표시한다. 이때 B는 A에 **포함된다**고 말한다.

B가 A의 부분모임이 아니라는것을 $B\not\subset A$와 같이 표시한다.

매개 모임은 자기자체의 부분모임이고 빈모임 ϕ은 모든 모임의 부분모임으로 본다.

빈모임도 아니고 자기자체도 아닌 부분모임을 **참부분모임**이라고 부른다.

［례］ 우리가 이미 알고있는 수모임들을 생각할 때
$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$이 성립한다.

［례］ 3각형전부의 모임을 A, 2등변3각형전부의 모임을 B, 바른3각형전부의 모임을 C라고 하면 $C\subset B\subset A$이 성립한다.

[같은 모임]

$A\subset B$ 이고 $B\subset A$일 때 A와 B는 **같은 모임**이라고 부른다. 표시는 $A=B$

즉 모임 A와 B가 같은 원소들로 이루어졌을 때 모임 A와 B는 갈다고 말한다.

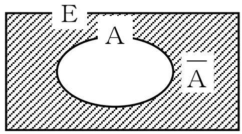
모든 빈모임은 같은 모임이다.

[전체모임]

모임 E를 하나 정해놓고 그 부분모임들만을 생각할 때 처음에 정한 모임 E를 **전체모임**이라고 부른다.

앞으로 모임 A, B, C, … 라고 하면 그것들을 전체모임 E의 부분모임으로 본다.

[나머지모임]



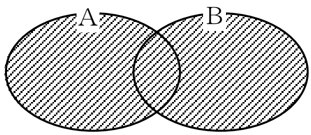
전체모임 E에 대하여 그의 부분모임 A의 원소를 제외한 E의 원소들로 된 모임을 A의 **나머지모임**이라고 부르고 $\overline{A}$로 표시한다.

즉 $\overline{A}=\{x|x\in E$ 이고 $x\notin A\}$

［례］ E＝{0, 1, 2, 3, 4, 5}, A＝{2, 4} 일 때

$\overline{A}$＝{0, 1, 3, 5}

[모임의 합]



모임 A 또는 B에 드는(둘중에 어느 하나에 드는) 원소들로 된 모임을 A와 B의 **합**이라고 부르고 A⋃B로 표시한다.

즉 $A\cup B=\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$

［례］ A＝{1, 2, 3, 4}, B＝{2, 4, 6}일 때

A∪B＝{1, 2, 3, 4, 6}

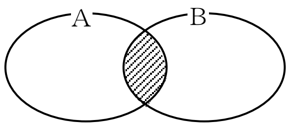
— **모임의 합의 성질**

① $A\cup B=B\cup A$ (바꿈법칙)

② $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (묶음법칙)

③ $A\subset B$ 이면 $A\cup B=B$ 특히 $A\cup A=A$

[모임의 사귐(적)]



모임 A에도 들고 B에도 드는(A, B에 동시에 드는) 원소들로 된 모임을 A와 B의 **사귐(적)**이라고 부르고 A∩B로 표시한다.

즉 $A\cap B=\{x|x\in A$ 이고 $x\in B\}$

［례］ A＝{1, 2, 3, 4, 5}, B＝{2, 3, 5}일 때

A∩B＝{2, 3, 5}

Z∩N＝N （Z: 옹근수모임, N: 자연수모임）

— **모임의 사귐의 성질**

① $A\cap B=B\cap A$ (바꿈법칙)

② $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (묶음법칙)

③ $A\subset B$ 이면 $A\cap B=A$ 특히 $A\cap A=A$

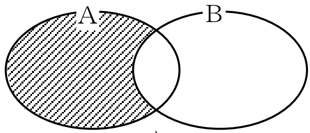
모임의 합, 적으로부터 다음의 사실이 성립한다.

① $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
② $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
(분배법칙)

③ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
④ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
(쌍대법칙)

[모임의 차]

두 모임 A와 B에 대하여 A의 원소로서 B에 들지 않는 원소들의 모임을 모임 A에서 B를 던 **차**라고 부르고 $A\backslash B$로 표시한다.



즉 $A\backslash B=\{x|\ x\in A$ 이고 $x\notin B\}$

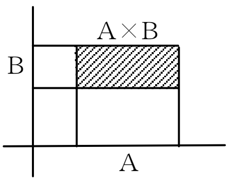
[모임의 직적(데까르뜨적)]

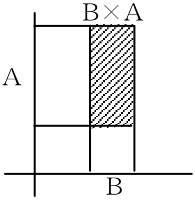
모임 A와 B에 대하여 A의 원소를 첫 성분으로 B의 원소를 둘째 성분으로 하는 원소쌍전부의 모임을 모임 A와 B의 **직적**이라고 부르고 $A\times B$로 표시한다.

즉 $A\times B=\{(a,\ b)|a\in A,\ b\in B\}$

만일 A, B가 수모임이면 a를 원소$(a,\ b)$의 **첫째 자리표**, b를 그의 **둘째 자리표**라고 부른다.

직적 $A\times B$, $B\times A$를 그림으로 표시하면 아래와 같다.





［례］ $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{3,\ 4\}$일 때

$A\times B=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4)\}$

$B\times A=\{(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\}$

상 식

모임론의 창시자 칸토르
(1845-1918, 도이췰란드)

칸토르는 1874년 29살 때 모임론의 첫 론문을 발표하였다. 빵까레, 힐베르트 등 이름있는 학자들이 이것을 지지하였다.

그런데 칸토르의 옛 스승인 크로네케르는 《칸토르가 정신나간 소리를 한다.》고 욕설을 퍼부었고 기승을 부리였다고 한다. 자기 옛 스승의 비난과 공격은 칸토르에게 큰 정신적타격을 주었다.

이로 말미암아 정신병에 걸려 정신병원에 입원하게 되였는데 거기서도 그는 모임론을 계속 연구하였다고 한다.

칸토르는 죽을 때까지 모임론을 인정받지 못하였는데 사망한지 30년만에야 인정을 받았다.

오늘 모임론은 모든 수학의 기초로 되고있다.

그리하여 중학교에서까지 모임론의 초보를 배워주고있다.

2. 명 제

[명제]

옳다든가 옳지 않다든가를 찍어서 말할수 있는 글 또는 식을 **명제**라고 부른다. 그러므로 명제에는 옳은 명제도 있고 옳지 않은 명제도 있다.

옳기도 하고 옳지 않기도 하는 그런 명제는 없다.

［례］ 1) $2+3=5$(옳은 명제)

2) $90° < 45°$ (옳지 않은 명제)

3) $3 > -2$(옳은 명제)

4) 5＝4(옳지 않은 명제)

5) 3각형의 아낙각의 합은 90° 이다.(옳지 않은 명제)

6) 6은 24의 약수이다.(옳은 명제)

[명제의 값]

명제 p에 대하여 p가 옳으면 1을 대응시키고 p가 옳지 않으면 0을 대응시킬 때 수 1, 0을 **명제의 진리값**(간단히 값)이라고 부르고 $[p]$로 표시한다.

[례] p:《5＞3》이면 $[p]=1$

q:《직3각형에서 빗변이 제일 작다.》이면 $[q]=0$

r:《3각형의 아낙각의 합은 2π 이다.》이면 $[r]=0$

[명제함수(명제형식)]

변수 x에 관한 글 또는 식 $f(x)$에 어떤 값을 넣어 그것이 명제로 될 때 $f(x)$를 변수 x에 관한 **명제함수(명제형식)**이라고 부른다.

여러변수에 대해서도 마찬가지로 정의한다.

[례] $p(x)$: 《$x+2>3$》은 명제함수이다.

$q(x,\ y)$:《$x^2+y^2=9$》은 두변수명제함수이다.

명제함수 $p(x)$에 대하여 $x=a$를 넣었을 때 $[p(a)]$를 **명제함수의 값**이라고 부른다.

– **명제함수의 뜻구역과 값구역**

명제함수 $f(x)$에서 x가 변하는 구역을 명제함수의 **뜻구역**이라고 부른다. 그리고 x가 $f(x)$의 뜻구역에서 변할 때 $f(x)$가 표시하는 명제들의 모임을 명제함수의 **값구역**이라고 부른다.

[례] $f(x)$:《$3x-2>x$》에서 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$이다.

그리고 x가 가능한 실수값을 다 취할 때 얻어지는 명제들의 모임 $S=\{3x-2>x \mid x\in(-\infty,\ +\infty)\}$는 명제함수의 값구역으로 된다.

— **명제함수의 옳음모임**

명제함수 $f(x)$가 옳은 명제로 되는 x전체의 모임

$$\mathrm{T}=\{x \mid f(x) \text{는 옳은 명제}\}$$

를 명제함수 $f(x)$의 **옳음모임**이라고 부른다.

［례］ 명제함수 《 $x^2-4<0$ 》의 옳음모임은 $(-2, 2)$이며 여기서 명제값은 1이고 $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$에서의 명제값은 0이다.

3. 명제의 산법

명제들에 《…아니다》, 《…이고 …이다》, 《…또는…》, 《…이면…이다》등의 말을 이어서 새로운 명제를 만드는것을 명제의 **합성** 또는 **명제산법**이라고 부르고 그때 얻어지는 새로운 명제를 **합성명제**라고 부른다.

[부정명제]

명제 p에 대하여 《 p가 아니다》라는 새로운 명제를 만들었을 때 이것을 명제 p의 **부정명제**라고 부르고 $\overline{p}$로 표시한다.

부정명제 $\overline{p}$의 명제값표는 다음과 같다.

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

［례］ p:《3각형의 아낙각의 합은 2직각이 아니다.》 (옳지 않은 명제)

$\overline{p}$:《 3각형의 아낙각의 합은 2직각이 아니다가 아니다.》

해석:《3각형의 아낙각의 합은 2직각이다.》 (옳은 명제)

q :《 $5>7$ 》일 때 $\overline{q}$: 《 $5\leq 7$ 》이고 다시 $\overline{\overline{q}}$: 《$5>7$》이다.

$\therefore \quad q = \overline{\overline{q}}$

※ 명제 p의 부정을 만들 때 반드시 부정명제를 해석해야 한다.

[합명제]

두 명제 p, q에 대하여 p, q가운데 하나라도 옳으면 옳다고 보는 새로운 명제를 명제 p와 q의 **합명제**라고 부르고 $p \vee q$로 표시한다. $p \vee q$는 p, q가 둘다 옳지 않을 때만 옳지 않다.

합명제 $p \vee q$의 명제값표는 다음과 같다.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

［례］ p:《평행직선에서 엇각은 같다.》(옳은 명제)

q:《평행직선에서 같은자리각은 다르다.》

(옳지 않은 명제)

$p \vee q$:《평행직선에서 엇각은 같거나 같은자리각은 다르다.》(옳은 명제)

[적명제]

두 명제 p, q에 대하여 p, q가 동시에 옳을 때만 옳다고 보는 새로운 명제를 명제 p와 q의 **적명제**라고 부르고 $p \wedge q$로 표시한다.

$p \wedge q$는 p, q가운데 하나라도 옳지 않으면 옳지 않다.

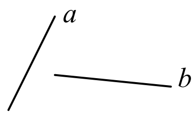
적명제 $p \wedge q$의 명제값표는 다음과 같다.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[례] p:《직선 a, b는 평행이 아니다.》(옳은 명제)

q: 《직선 a, b는 사귀지 않는다.》(옳은 명제)

$p \wedge q$: 《직선 a, b는 평행도 아니고 사귀지도 않는다.》(직선 a, b는 어긴다.)(옳은 명제)



[따름명제]

두 명제 p, q에 대하여 p가 옳고 q가 옳지 않을 때만 옳지 않다고 보는 새로운 명제 《p이면 q이다.》를 명제 p, q의 **따름명제**라고 부르고 $p \to q$로 표시한다.

따름명제 $p \to q$의 명제값표는 다음과 같다.

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

[례] p:《3각형에서 두 변은 같다.》

q:《3각형에서 두 각은 같다.》

$p \to q$:《3각형에서 두 변이 같으면 두 각은 같다.》

따름명제 $p \to q$에서 명제 p가 성립하는 대상들의 모임을 P, 명제 q가 성립하는 대상들의 모임을 Q로 표시할 때 P와 Q가 어떤 전체모임 E의 부분모임인 경우를 보자.

[례] p:《옹근수는 6의 배수이다.》

q:《옹근수는 합성수이다.》

이때 따름명제

$p \to q$:《옹근수가 6의 배수이면 그 수는 합성수이다.》는 옳다.

명제 p가 성립하는 대상들의 모임을 P, 명제 q가 성립하는 대상들의 모임을 Q라고 할 때 P,

Q는 어떤 전체모임 E의 부분모임이라고 하자. 이때 명제 $p \to q$가 옳으면 P⊂Q이고 그 거꿀도 성립한다. 따름명제 $p \to q$를 $p \Rightarrow q$로 쓰기로 한다.

[동등명제]

두 명제 p, q에 대하여 $(p \to q) \wedge (q \to p)$인 새로운 명제를 두 명제 p, q의 **동등명제**라고 부르고 $p \leftrightarrow q$로 표시한다.

이것은 동등명제 p, q가 둘다 동시에 옳거나 옳지 않을 때만 옳다는것을 말해준다.

동등명제 $p \leftrightarrow q$의 명제값표는 다음과 같다.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$ $(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

［례］ ∠B＝∠C 인 2등변3각형 ABC가 있다.

p :《△ABC에서 AB=AC이다.》(옳은 명제)

q :《△ABC에서 ∠B＝∠C 이다.》(옳은 명제)

$p \to q$:《△ABC에서 AB=AC이면 ∠B＝∠C 이다.》 (옳은 명제)

$q \to p$:《△ABC에서 ∠B＝∠C 이면 AB=AC이다.》 (옳은 명제)

$p \leftrightarrow q$:《△ABC에서 AB=AC↔∠B＝∠C 이다.》 (옳은 명제)

[론리기호]

명제산법에 쓰이는 산법기호 ―, ∨, ∧, →, ↔를 **론리기호**라고 부른다.

명제들에 여러가지 론리기호를 써서 보다 복잡한 합성명제를 만들수 있다.

따름명제 $p \to q$에서 조건 p가 성립하는 대상들의 모임을 P, 결론 q가 성립하는 대상들의 모임을 Q로 표시할 때 P, Q가 어떤 모임 E의 부분모임인 경우를 보자.

명제 $p \Rightarrow q$에서 q는 p이기만 하면 충분하다. 그리하여 p를 q이기 위한 **충분조건**이라고 부른다.

다음으로 $p \Rightarrow q$에서 p이기 위하여 필요한 조건은 q 외에도 더 있을수 있다.

실례로 p: 직2등변3각형

q: 두 변이 같은 3각형

r: 직3각형(같은 두 변이 만드는 각이 직각)

으로 놓으면 p이기 위하여서는 q도 필요하고 r도 필요하다.

어쨌든 $p \Rightarrow q$에서 p이기 위하여서는 반드시 q가 필요하다.

그리하여 q를 p이기 위한 **필요조건**이라고 부른다.

그러면 $p \Leftrightarrow q$에서 p는 q이기 위한 필요조건도 되고 충분조건도 된다.

따라서 $p \Leftrightarrow q$를 《p이기 위해서는 q일것이 필요하고 충분하다.》고도 말한다.

［례］ 1) 두 직선이 평행이 되기 위하여서는 같은자리각이 같을것이 필요하고 충분하다.

2) 4각형이 평행4변형이 되기 위하여서는 한쌍의 맞은변이 평행이고 같을것이 필요하고 충분하다.

[명제의 산법법칙]

두 합성명제가 꼭같은 명제값표를 가질 때 두 합성명제는 **같다**고 말하고 기호 《$=$》를 써서 표시한다.

[례] $\overline{p\wedge q}$ 와 $\bar{p}\vee\bar{q}$ 의 명제값이 같으므로 $\overline{p\wedge q}=\bar{p}\vee\bar{q}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p\wedge q$	$\overline{p\wedge q}$	$\bar{p}\vee\bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

명제 p, q, r에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

1) 바꿈법칙 $p\vee q=q\vee p$
$p\wedge q=q\wedge p$
$p\Leftrightarrow q=q\Leftrightarrow p$

2) 묶음법칙 $(p\vee q)\vee r=p\vee(q\vee r)$
$(p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$

3) 분배법칙 $p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
$p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

4) 쌍대법칙 $\overline{p\wedge q}=\bar{p}\vee\bar{q}$
$\overline{p\vee q}=\bar{p}\wedge\bar{q}$

[기본산법]

론리산법 →와 ⇔는 론리산법 —, ∨, ∧에 의하여 늘 표시할수 있으므로 —, ∨, ∧를 **기본산법**이라고 부른다.

론리산법에서 괄호가 없을 때에는 계산을 —, ∧, ∨, →, ⇔의 차례로 한다,

[거꿀명제]

명제 $p\to q$ 에 대하여 명제 $q\to p$ 를 **거꿀명제**라고 부른다.

[례] p :《2=3》, q :《3=3》에 대하여

$p\to q$:《2=3이면 3=3》이다.(옳은 명제)

$q\to p$:《3=3이면 2=3》이다.(옳지 않은 명제)

[안명제(반대명제)]

명제 $p\to q$ 에 대하여 $\bar{p}\to\bar{q}$ 를 **안명제(반대명제)**라고 부른다.

［례］ p :《2＝3》, q :《3＝3》에 대하여

$\overline{p}$:《2≠3》(옳은 명제)

$\overline{q}$:《3≠3》(옳지 않은 명제)

이때 $p \to q$:《2＝3이면 3＝3》(옳은 명제)

$\overline{p} \to \overline{q}$:《2≠3이면 3≠3》(옳지 않은 명제)

[거꿀안명제(거꿀반대명제)]

명제 $p \to q$ 에 대하여 $\overline{q} \to \overline{p}$ 를 **거꿀안명제(거꿀반대명제)** 라고 부른다.

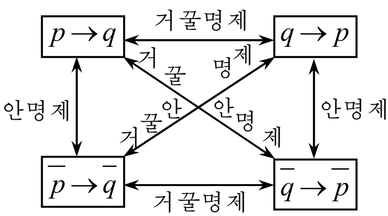
［례］ p :《2＝3》, q :《3＝3》

$\overline{q} \to \overline{p}$: 《3≠3이면 2≠3》(옳은 명제)

[명제호상관계]

명제 $p \to q$ 에 대하여 거꿀명제 $q \to p$, 안명제(반대명제) $\overline{p} \to \overline{q}$, 거꿀안명제(거꿀반대명제) $\overline{q} \to \overline{p}$ 사이에는 다음의 관계가 있다.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \to q$	$q \to p$	$\overline{p} \to \overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1



따라서 $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$, $q \to p = \overline{p} \to \overline{q}$

$p \to q \neq q \to p$, $p \to q \neq \overline{p} \to \overline{q}$

[명제의 증명]

― **증명**

명제가운데는 옳은것도 있고 옳지 않은것도 있다. 명제가 옳으면 옳다는것을 밝혀야 하며 옳지 않으면 옳지 않다는것을 밝혀야 한다.

명제가 옳다는것을 밝힐 때 짐작하거나 대강 따져보는것이 아니라 명제의 조건으로부터 명제의 결론을 이미 아는 성질(공식, 법칙) 또는 공리, 정의, 이미 증명된 명제를 리용하면서 이끌어낸다. 이와 같이 하는것을 **증명**이라고 부른다.

이미 증명된 명제를 **정리**라고 부른다. 어떤 정리를 증명하기 위하여 먼저 설정하고 증명하는 예비명제를 **보조정리**라고 부른다.

※ 주어진 정리의 거꿀명제와 안명제가 옳으면 그것을 각각 주어진 정리의 **거꿀정리, 안정리**라고 부른다. 주어진 정리의 거꿀안명제는 반드시 성립하기때문에 그것을 주어진 정리의 거꿀안정리라고 부를수 있다.

― **증명법**

증명법에는 직접증명법, 간접증명법이 있다.

수학적귀납법은 독립적인 증명법으로 볼 때도 있지만 직접증명법에 포함시킨다.

[직접증명법]

명제의 조건을 리용하여 명제의 결론이 성립되는가 안되는가를 직접 밝히는 증명법을 말한다.

직접증명법에는 종합적방법, 해석적방법이 있다.

종합적방법은 명제의 조건으로부터 출발하여 일련의 판단을 거쳐서 결론에 이르는 방법이다.

해석적방법은 명제의 결론으로부터 출발하여 일련의 판단을 거쳐서 명제의 결론이 얻어지기 위해서는 어떤 조건이 필요한가를 차례로 따져가면서 명제의 조건에 귀결시키는 방법이다.

［례］ $a\geq 0$, $b\geq 0$일 때 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$를 증명한다고 하자.

종합적방법. 명제의 조건 $a\geq 0$, $b\geq 0$으로부터 $\sqrt{a}, \sqrt{b}$가 뜻을 가지며 이때

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$$

$$a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$$

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

와 같이 명제의 결론이 얻어진다.

해석적방법. 명제의 결론 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$으로부터

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$$

$$a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ (a\geq 0,\ b\geq 0)$$

이리하여 명제의 결론이 옳을수밖에 없다. 즉

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

[수학적귀납법]

수학적귀납법은 직접증명법에 속한다.

자연수와 관련되는 명제들의 렬(S_n)이 있어서 어떤 자연수렬

$$k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

에 대응하는 수학명제들의 렬

$$\mathrm{S}_k,\ \mathrm{S}_{k+1},\ \mathrm{S}_{k+2},\ \cdots,\ \mathrm{S}_n,\ \cdots$$

을 고찰할 때

1) S_k 가 성립하고

2) 임의의 n 에 대하여 S_n 이 성립한다는 가정밑에서 S_{n+1} 이 성립한다는것이 밝혀지면 모든 $S_\ell(\ell=k,\ k+1,\ \cdots)$ 이 성립한다고 단정하는 방법이다.

여기서 k 는 1부터일수도 있고 문제에 따라 2 또는 그 이상일수도 있다.

[간접증명법]

주어진 명제대신에 그것과 동등한 명제를 증명함으로써 주어진 명제가 성립한다는것을 간접적으로 긍정하지 않을수 없게 하는 방법이다.

간접증명법은 직접증명법을 적용하기 어려운 경우에 흔히 쓴다.

간접증명법에는 귀유법, 전환법, 동일법이 있다. 여기서 대표적인것은 귀유법이다.

귀유법은 명제의 결론을 그와 반대로 가정하고 거기서부터 이미 알고있는 공리, 정리 또는 명제의 조건에 어긋나는 결론이 얻어지기때문에 명제의 결론이 옳지 않을수 없다(옳다)고 단정하는 방법이다.

［례］ $a,\ b$ 가 동시에 짝수이거나 홀수이면 $a+b$ 는 짝수라는것을 귀유법으로 증명하자. $a,\ b$ 가 동시에 짝수(홀수)인데도 $a+b$ 가 홀수라고 하자. 그러면 a 가 짝수(홀수)이면 b 는 홀수(짝수)여야 한다.

이것은 $a,\ b$ 가 동시에 짝수(홀수)라는데 어긋난다. 따라서 $a+b$ 는 짝수일수밖에 없다. 즉 짝수이다.

전환법은 몇개의 정리의 조건들이 있을수 있는 모든 경우를 망라하고있으며 정리의 결론들이 서로 다르면 정리의 거꿀들도 성립한다는 증명법이다.

실례로 △ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 맞은변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면 ∠C가 뾰족각, 직각, 무딘각인 경우에 각각

$$a^2+b^2>c^2,\ \ a^2+b^2=c^2,\ \ a^2+b^2<c^2$$

이 성립한다. 이때 조건은 있을수 있는 경우가 다 망라되여있으며 결론은 서로 다르다. 따라서 거꿀이 성립한다.

동일법은 도형 F가 A라는 성질을 가진다는것을 증명하기 위하여 A라는 성질을 가지는 도형 F_1을 생각하고 F와 F_1이 한 도형이라는것을 밝힘으로써 증명하는것이 옳다고 확정하는 증명방법이다.

이밖에도 명제가 성립하지 않는다는것을 밝힐 때 반례를 드는 방법, 존재명제를 증명할 때 조건에 맞는 대상의 례를 하나만이라도 들면 증명되는 방법도 있다.

이밖에 구체적인 명제의 내용에 따라 독특한 증명법이 있다.

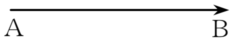
제9장. 도형의 방정식

1. 벡토르

[벡토르]

크기와 방향을 가진 선분을 **벡토르**라고 부른다.

끝점이 A, B인 벡토르 $\overrightarrow{AB}$와 같이 표시한다.



벡토르 $\overrightarrow{AB}$에서 A를 벡토르의 **첫 점**, B를 벡토르의 **끝점**이라고 부른다.

벡토르는 한개의 글자로도 표시한다.

$$\vec{a} \text{ 또는 } \boldsymbol{a}$$

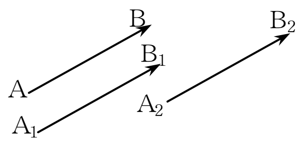
벡토르 $\overrightarrow{AB}$에서 선분 AB의 길이를 벡토르 $\overrightarrow{AB}$의 **크기** 또는 **길이**라고 부르고 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$와 같이 표시한다.

벡토르 $\vec{a}$의 크기는 $|\vec{a}|$와 같이 표시한다.

길이가 1인 벡토르를 **단위벡토르**라고 부른다.

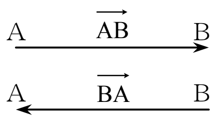
길이가 0인 벡토르를 **령벡토르**라고 부르며 $\mathbf{0}$ 혹은 $\vec{0}$으로 표시하기도 한다.

두 벡토르의 크기와 방향이 같을 때 그 두 벡토르를 **같은벡토르**라고 부른다.



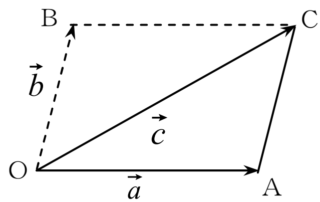
그림에서 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$

벡토르 $\overrightarrow{BA}$를 $\overrightarrow{AB}$의 **반대벡토르**라고 부르고 $-\overrightarrow{AB}$와 같이 표시한다.



[벡토르의 합과 차]

서로 평행이 아닌 두 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 동일한 첫 점 O를 가지게 하면 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 로 표시할수 있고 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 변으로 하는 평행4변형 OACB의 대각선으로 표시된 벡토르 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$에 의하여 벡토르 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합을 정의한다.



이것을 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$로 표시하고 $\vec{c}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **벡토르의 합**이라고 부르며 이 방법을 벡토르합의 **평행4변형법칙**이라고 부른다. 여기서 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$이므로 수학에서는 벡토르의 합을 다음과 같이도 정의한다.

벡토르 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합이라는것은 $\vec{a}$의 끝점과 $\vec{b}$의 첫점을 일치시키고 $\vec{a}$의 첫점을 첫점으로 하고 $\vec{b}$의 끝점을 끝점으로 하는 새 벡토르 $\vec{c}$를 말한다.

벡토르의 합에 대하여 다음의 성질이 성립한다.

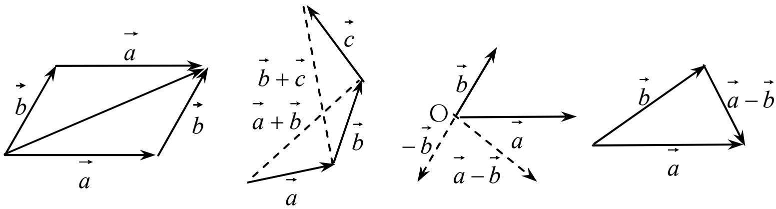
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (바꿈법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (묶음법칙)

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

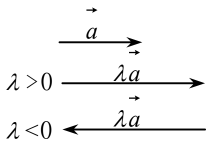
$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

벡토르 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **차**라고 부르고 $\vec{a}-\vec{b}$와 같이 표시한다.



[벡토르에 수를 곱하기]

벡토르 $\vec{a}$와 수 λ가 주어졌을 때 다음과 같은 벡토르를 $\vec{a}$에 수 λ를 곱한 **적**이라고 부르고 $\lambda\vec{a}$로 표시한다.



① $\lambda>0$이면 크기는 $\vec{a}$의 크기의 λ배이고 방향은 $\vec{a}$의 방향과 같은 벡토르

② $\lambda<0$ 이면 크기는 $\vec{a}$의 크기의 $|\lambda|$배이고 방향은 $\vec{a}$의 방향과 반대인 벡토르

③ $\lambda=0$이면 령벡토르

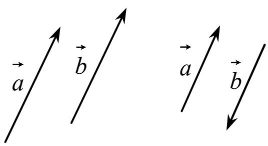
벡토르와 수와의 곱하기는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$
$$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$$
$$1\vec{a}=\vec{a}$$

여기서 $\lambda,\ \mu\in\mathrm{R}$

[공선벡토르]

두 벡토르가 방향이 같거나 반대일 때 또는 두 벡토르가운데서 적어도 하나가 $\vec{0}$일 때 이 두 벡토르는 **공선**이라고 부른다.



이것을 $\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}$ 와 같이 표시한다.

$\vec{0}$가 아닌 두 벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a},\quad m\in\mathrm{R}$$

[자리표벡토르]

자리표계에서 자리표축의 정의 방향으로 향한 단위벡토르들을 **자리표벡토르**라고 부른다.

직선자리표계에서 자리표벡토르를 $\vec{i}$, 평면직각자리표계에서 자리표벡토르들을 각각 $\vec{i}, \vec{j}$, 공간직각자리표계에서 자리표벡토르들을 각각 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$로 표시한다.

자리표벡토르를 리용하여 자리표계를 표시할 때에는 다음과 같이 쓴다.

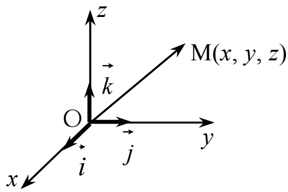
직선자리표계 $\{O: \vec{i}\}$ (직선)

평면직각자리표계 $\{O: \vec{i}, \vec{j}\}$ (평면)

공간직각자리표계 $\{O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (공간)

점 M이 주어졌을 때 자리표원점을 첫점으로 하고 점 M을 끝점으로 하는 벡토르 $\overrightarrow{OM}$을 점 M의 **자리벡토르**라고 부른다.

[벡토르의 자리표]



직각자리표계 $\{O: x, y, z\}$가 주어졌다.

점 $M\{x, y, z\}$의 자리벡토르의 자리표표시는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

또는 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$

이때 $\{x, y, z\}$를 벡토르 $\overrightarrow{OM}$의 **자리표** 또는 **성분**이라고 부른다.

평면에서 직각자리표계 $\{O: x, y\}$가 주어졌을 때 점 $M(x, y)$의 자리벡토르 $\overrightarrow{OM}$의 자리표표시는

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

또는 $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ 이다.

주의. 평면에서는 늘 z=0인것으로 생각할수 있으므로 공간에서 얻어진 식들에서 z마디를 없애면 평면에서 성립하는 식이 얻어진다. 그러므로 앞으로 공간에서만 생각하기로 한다.

ㅡ 벡토르 $\overrightarrow{AB}$의 자리표

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$와 $B(x_2, y_2, z_2)$가 주어졌을 때 벡토르 $\overrightarrow{AB}$의 자리표표시는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

또는

$$\overrightarrow{AB}=\{(x_2-x_1),\ (y_2-y_1),\ (z_2-z_1)\}$$

[례] A(4, -3, 1), B(1, 5, -2)일 때 $\overrightarrow{AB}$의 자리표표시

$$\overrightarrow{AB}=(1-4)\ \vec{i}+(5+3)\ \vec{j}+(-2-1)\ \vec{k}=-3\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}$$

또는

$$\overrightarrow{AB}=\{(1-4),\ (5+3),\ (-2-1)\}=\{-3,\ 8,\ -3\}$$

[자리표로 주어진 벡토르의 선형산법]

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

일 때

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$$

또는

$$\vec{a}+\vec{b}=\{(a_x+b_x),\ \ (a_y+b_y),\ \ (a_z+b_z)\}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$$

또는

$$\vec{a}-\vec{b}=\{(a_x-b_x),\ \ (a_y-b_y),\ \ (a_z-b_z)\}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$$

또는

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}$$

[두 벡토르의 스칼라적]

두 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 길이들과 이 두 벡토르사이의 각의 코시누스값의 적으로 되는 수

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$$

를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 **스칼라적**이라고 부르고 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 또는 $(\vec{a},\ \vec{b})$ 로 표시한다.

즉 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$$

— **스칼라적의 성질**

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (바꿈법칙)

② $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$(\vec{a}\cdot\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\quad \lambda\in\mathrm{R}$

④ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

⑤ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

⑥ $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ 일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

[벡토르의 길이]

벡토르 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ 의 길이는

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

※ 두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 와 $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

[두 벡토르사이의 각]

두 벡토르 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ 사이의 각의 코시누스값은

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

［례］ 두 벡토르 $\vec{a}=\{2, -6, -3\}$ 와 $\vec{b}=\{3, 0, -4\}$ 사이의 각의 코시누스값은

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{2\cdot3+(-6)\cdot0+(-3)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{6+12}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{25}}=\frac{18}{35}\approx0.5142$$

이므로 수표를 리용하면

$$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=59^\circ\ 3'$$

[두 벡토르의 벡토르적]

두 벡토르 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 벡토르적이란 다음 조건을 만족시키는 벡토르 $\vec{c}$ 를 말한다.

① $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$

② $\vec{c}$ 는 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 놓이는 평면에 수직이며 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 방향으로 오른손의 첫 두손가락을 각각 펴고 셋째손가락을 그것들과 수직되게 폈을 때 셋째손가락이 향하는 방향을 가진다.

벡토르 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 벡토르적을 $\vec{a}\times\vec{b}$ 또는 $[\vec{a}, \vec{b}]$와 같이 표시한다.

— **벡토르적의 성질**

① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

② $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 령벡토르가 아닐 때 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$, $\vec{b}$ 는 공선

[벡토르적의 자리표표시]

두 벡토르가

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

일 때 벡토르적의 자리표표시는

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

또는

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

［례］ 벡토르 $\vec{a}=\{2,\ -6,\ 5\}$와 $\vec{b}=\{4,\ -3,\ 1\}$의 벡토르적을 구하여라.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k}$$

2. 평면에서 직선의 방정식

[도형의 방정식]

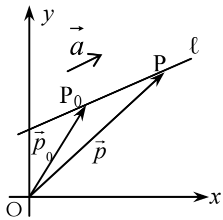
$x,\ y$에 관한 방정식을 $f(x,\ y)=0$이라고 할 때 모임 $\mathrm{F}=\{(x,\ y) \mid f(x,\ y)=0\}$을 방정식 $f(x,\ y)=0$으로 정해지는 도형, $f(x,\ y)=0$을 **도형 F의 방정식**이라고 부른다. 즉

$\mathrm{M}(x,\ y)\in \mathrm{F} \Leftrightarrow f(x,\ y)=0$일 때 $f(x,\ y)=0$을 **도형 F의 방정식**이라고 부른다.

[방향벡토르에 의한 직선의 방정식]

직선에 놓이거나 직선에 평행인 벡토르가 주어졌을 때 그것을 직선의 **방향벡토르**라고 부른다.

이제 직선 ℓ과 그의 방향벡토르 $\vec{a}$가 주어졌다고 하자.



직선 ℓ에서 어떤 점 P_0을 잡으면 P_0에는 자리벡토르 $\overrightarrow{OP_0} = \vec{P}_0$이 대응한다.

다음으로 직선 ℓ에서 임의의 점 P를 잡으면 P에는 자리벡토르 $\overrightarrow{OP} = \vec{P}$가 대응한다. 이때

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a},\ t \in R$$

그런데

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{P} - \vec{P}_0$$

따라서

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{a},\ t \in R$$

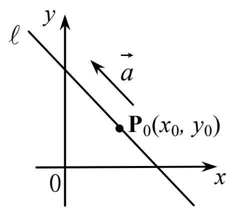
점 P가 직선 ℓ의 점이 아니면 $\overrightarrow{P_0P}$는 $\vec{a}$와 평행이 아니다.

그러므로 이런 점 P에 대해서는 우의 식이 성립하지 않는다.

우의 방정식을 직선 ℓ의 **벡토르방정식**이라고 부른다.

이제 $\overrightarrow{OP} = \{x,\ y\}$, $\overrightarrow{OP_0} = \{x_0,\ y_0\}$, $\vec{a} = \{a_x,\ a_y\}$ 라고 하면 직선의 벡토르방정식은

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \end{cases},\quad t \in R$$



모양으로 표시된다.

이것을 직선 ℓ의 **보조변수방정식**이라고 부르며 t를 **보조변수**라고 부른다.

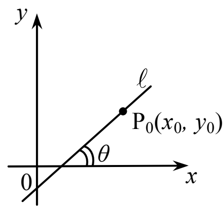
보조변수방정식에서 t를 없애면

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}$$

이 방정식을 **방향벡토르에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

[방향결수에 의한 직선의 방정식]

직선 ℓ이 x축의 정의 방향과 θ만 한 각을 이룰 때 $k=\tan\theta\,(\theta\neq 90^\circ)$를 직선 ℓ의 **방향결수**(또는 **각결수**)라고 부른다.



점 $P_0(x_0,\ y_0)$을 지나며 방향결수가 k인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

특히 직선이 점 $B(0,\ b)$를 지나는 경우에는

$$y=kx+b$$

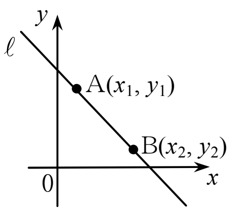
이 방정식들을 **방향결수에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

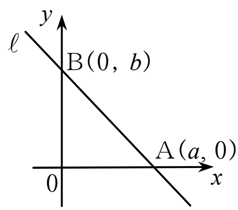
[두 점을 지나는 직선의 방정식]

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

이 방정식을 **두 점을 지나는 직선의 방정식**이라고 부른다.





특히 두 점 $A(a,\ 0)$와 $B(0,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

이다. 이 방정식을 **단편에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

[법선벡토르에 의한 직선의 방정식]

주어진 직선에 수직인 벡토르를 이 직선의 **법선벡토르**라고 부른다.

점 $P_0(x_0, y_0)$을 지나며 벡토르 $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}$가 법선벡토르인 직선의 방정식은 직선의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$이므로 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$으로 표시된다.

이 방정식을 **법선벡토르에 의한 직선의 방정식**이라고 부른다.

[직선의 일반방정식]

모든 직선의 방정식들은 다음과 같은 모양으로 바꿀수 있다.

$$ax+by+c=0$$

여기서 $a, b, c\in\mathrm{R}$

사실 앞에서 고찰한 여러가지 모양의 직선의 방정식들은 늘 $ax+by+c=0$으로 변형할수 있다.

이 방정식을 **직선의 일반방정식**이라고 부른다.

[두 직선의 평행조건과 사귐조건]

두 직선

$$\ell_1:\quad a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\ell_2:\quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

이 주어졌다고 하자.

직선 ℓ_1의 법선벡토르는 $\vec{n}_1=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$

직선 ℓ_2의 법선벡토르는 $\vec{n}_2=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$

이때 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 위치관계를 보자.

— **두 직선의 평행조건**

$\ell_1/\!/\ell_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}/\!/\vec{n_2}$이므로 $\ell_1/\!/\ell_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

$\ell_1/\!/\ell_2$인 경우는 ℓ_1과 ℓ_2가 일치하는 경우도 포함하는것으로 본다.

— **두 직선의 사귐조건**

$\ell_1 \not\parallel \ell_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \not\parallel \overrightarrow{n_2}$ 이므로

$\ell_1 \not\parallel \ell_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ($a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ 인 경우)

결국 두 직선 ℓ_1, ℓ_2에서

1) $\ell_1 /\!/ \ell_2$ (또는 일치) $\Leftrightarrow$ 두 직선의 일반방정식에서 x, y의 결수가 비례한다.

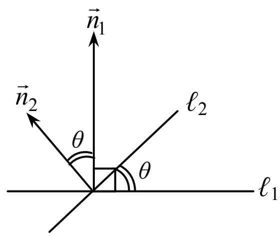
2) $\ell_1 \not\parallel \ell_2 \Leftrightarrow$ 두 직선의 일반방정식에서 x, y의 결수가 비례하지 않는다.

[두 직선이 이루는 각, 두 직선의 수직조건]

두 직선

$$\ell_1: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$\ell_2: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

이 주어졌다고 하자.



직선 ℓ_1의 법선벡토르는

$$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$$

직선 ℓ_2의 법선벡토르는

$$\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} \text{ 이므로}$$

$$\vec{n}_1 \perp \ell_1, \quad \vec{n}_2 \perp \ell_2$$

그러므로 ℓ_1과 ℓ_2 사이의 각 θ는 $\vec{n}_1 \hat{\ } \vec{n}_2$과 같다. 즉 $\theta = \vec{n}_1 \hat{\ } \vec{n}_2$

따라서 두 직선사이의 각은 $\cos\theta = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

그리고 $\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow \cos\theta = 0$ 즉 $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

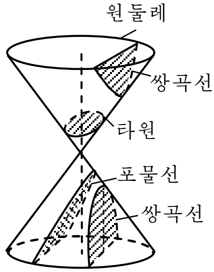
※ 두 직선의 평행조건, 수직조건을 방향결수에 의하여 표시하면

$$\ell_1 /\!/ \ell_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$
$$\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$$

3. 원뿔곡선

[원뿔곡선]

그림에서와 같이 원뿔을 평면으로 자를 때 원둘레, 타원, 쌍곡선, 포물선들이 생긴다.



그러므로 이런 곡선들을 통털어서 **원뿔곡선**이라고 부른다.

그런데 원뿔곡선의 방정식들은 모두 x, y에 관한 두변수2차방정식으로 된다.

그러므로 원뿔곡선을 **2차곡선**이라고도 부른다.

[원둘레]

주어진 점 O로부터 일정한 거리(r)에 있는 점 M들의 모임 $\{M|MO=r\}$을 중심이 O, 반경이 r인 **원둘레**라고 부른다.

[원둘레의 방정식]

중심이 O(a, b), 반경이 r인 원둘레의 방정식은

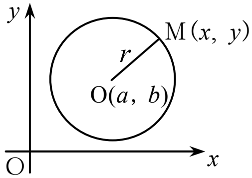
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

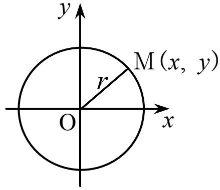
이 방정식을 원둘레의 **표준방정식**이라고 부른다.

중심이 O(0, 0)에 있는 경우 원둘레의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

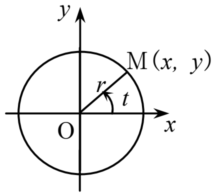
일반적으로 원둘레의 방정식은 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 표시되는데 x^2, y^2의 결수가 같고 령이 아니며 xy 마디가 없는것이 특징이다.





— **원둘레의 보조변수방정식**

중심이 O(0, 0)에 있고 반경이 r인 원둘레의 임의의 점 M(x, y)에 대하여 $\overrightarrow{OM}$과 x축사이의 각을 t라고 하면



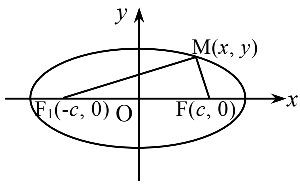
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

이다.

이 방정식을 t를 보조변수로 하는 **원둘레의 보조변수방정식**이라고 부른다.

[타원]

평면에 정해놓은 두 점 F_1, F 까지의 거리의 합이 일정 $(2a)$한 점들의 모임



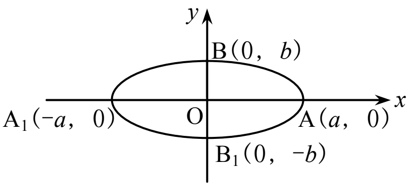
$$E = \{M \mid MF_1 + MF = 2a\}$$

를 **타원**이라고 부른다.

이때 점 F_1, F를 타원의 **초점**이라고 부른다.

타원이 x축과 사귀는 점을 A, A_1, y축과 사귀는 점을 B, B_1이라고 놓으면

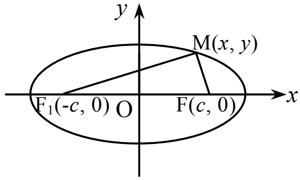
$$A(a,\ 0),\ A_1(-a,\ 0),\ B(0,\ b),\ B_1(0,\ -b)$$



이때 선분 $A_1A(=2a)$를 타원의 **긴축**, 선분 $BB_1(=2b)$을 타원의 **짧은축**이라고 부르고 a를 **긴반경**, b를 **짧은반경**이라고 부른다.

[타원의 방정식]

— 타원의 표준방정식



선분 F_1F 의 가운데점을 자리표원점 O로 정하고 점 F_1, F를 지나는 직선을 x축, O에서 선분 F_1F 에 수직인 직선을 y축으로 잡자.

$F_1F=2c(c<a)$ 로 놓으면

$$F_1(-c,\ 0),\quad F(c,\ 0)$$

타원 E의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 하면

$$MF_1+MF=2a$$

그런데 $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 이므로

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

이 식을 변형하고 $a^2-c^2=b^2(b>0)$ 으로 놓으면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

한편 $M(x,\ y)\notin E$이면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\neq 1$$

임을 증명할수 있다.

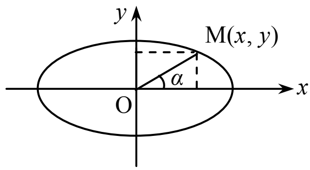
이리하여

$$M(x,\ y)\in E \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 을 **타원의 표준방정식**이라고 부른다.

— **타원의 보조변수방정식**

타원의 긴반경이 a, 짧은반경이 b, 타원의 점 M(x, y)에 대하여 OM이 x축의 정의 방향과 이루는 각을 α라고 할 때

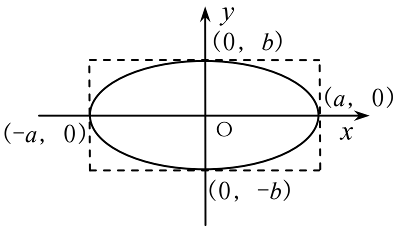


$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases}$$

을 **타원의 보조변수방정식**이라고 부른다. 여기서 α는 보조변수이다.

[타원의 기하학적성질]

① 타원은 선 $x = \pm a,\ \ y = \pm b$로 둘러싸인 직4각형안에 놓인다.



사실 타원의 점의 자리표(x, y)는

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1,\ \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ \ |x| \le a,\ \ |y| \le b$$

② 타원은 x축과 y축 그리고 자리표원점에 관하여 대칭이다. 따라서 x축과 y축은 대칭축이며 자리표원점은 대칭중심이다. 타원의 대칭중심을 타원의 **중심**이라고 부른다.

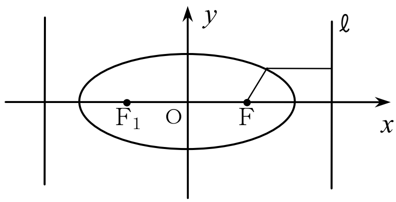
③ 타원의 정점: 타원과 x축 및 y축과의 사귐점을 타원의 **정점**이라고 부른다. 타원의 정점의 자리표는

$$(a, 0),\ \ (-a, 0),\ \ (0, b),\ \ (0, -b)\text{ 이다.}$$

④ 타원의 리심률: 타원에서 $e=\frac{c}{a}$ 를 타원의 **리심률**이라고 부른다.

$a>c>0$ 이므로 $0<e<1$ 이다. $e\to 0$ 이면 타원은 원에 가까와가고 $e\to 1$ 이면 타원은 직선에 접근한다.

⑤ 타원의 준선: 타원에서 $\ell:x=\pm\frac{a}{e}$ 인 직선을 타원의 **준선**이라고 부른다.



타원의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리의 비는 일정하다.

[쌍곡선]

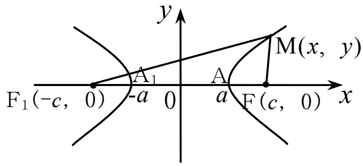
평면에서 정해놓은 두 점 F_1, F 까지의 거리의 차가 일정($2a$)한 점들의 모임을 **쌍곡선**이라고 부른다.

이때 점 F_1, F 를 쌍곡선의 **초점**이라고 부른다.

쌍곡선이 x축과 사귀는 점을 A_1, A 라고 하면

$A_1(-a,\ 0)$, $A(a,\ 0)$

이때 선분 $A_1A(=2a)$ 를 쌍곡선의 **실축**, 선분 OA 또는 그 길이 a 를 **실반경**이라고 부른다.



y축에서 두 점 $B_1(0,\ -b)$, $B(0,\ b)$ 를 잡았을 때 선분 $B_1B(=2b)$ 를 **허축**, 선분 OB 또는 그 길이 b 를 **허반경**이라고 부른다.

[쌍곡선의 방정식]

— 쌍곡선의 표준방정식

초점이 $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$ 이고 쌍곡선의 임의의 점 $M(x, y)$에 대하여 $|MF_1 - MF| = 2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

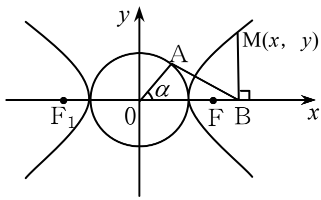
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

여기서 $b^2 = c^2 - a^2 > 0$

이 방정식을 **쌍곡선의 표준방정식**이라고 부른다.

— 쌍곡선의 보조변수방정식

쌍곡선의 임의의 점 $M(x, y)$에서 x축에 수직인 직선을 내리고 그 밑점을 B라고 하자.



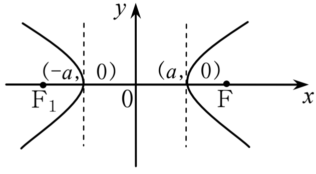
점 B에서 원 $O(a)$에 접선 BA를 그었을 때 $\angle AOB = \alpha$ 라고 하면 쌍곡선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x = a\sec\alpha \\ y = b\tan\alpha \end{cases}$$

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$$

[쌍곡선의 기하학적성질]

① 쌍곡선은 $x \geq a$, $x \leq -a$ 인 구역에 놓이는 무한곡선이다.



사실 쌍곡선의 자리표 (x, y)는 $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ 이므로 $|x| \geq a$ 이다.

② 쌍곡선도 타원처럼 x축과 y축 그리고 자리표원점에 관하여 대칭이다. 이 대칭중심을 쌍곡선의 **중심**이라고 부른다.

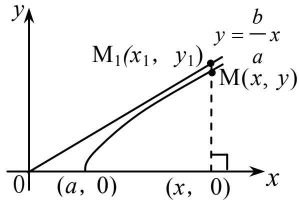
③ 쌍곡선의 정점: 쌍곡선과 자리표축과의 사귐점을 쌍곡선의 **정점**이라고 부른다.

쌍곡선은 두개의 정점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$을 가진다.

④ 쌍곡선의 점근선: 쌍곡선의 방정식을 고쳐쓰면

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

1사분구에 있는 쌍곡선의 가지 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x\geq a)$와 함께 직선 $y=\frac{b}{a}x$를 살펴보자.



$$\frac{b}{a}x>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

이므로 x 자리표가 같은 쌍곡선과 직선의 점을 각각 $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$이라고 하면 $y_1>y$

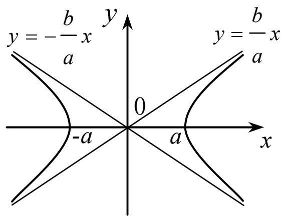
따라서 쌍곡선은 직선 $y=\frac{b}{a}x$아래에 놓인다.

$$y_1-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

즉 x가 커감에 따라 쌍곡선이 직선 $y=\frac{b}{a}x$에 한없이 가까와간다.

이 직선을 쌍곡선의 **점근선**이라고 부른다.

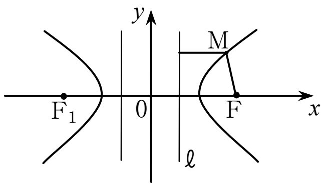
그림에서 보는바와 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에는 두개의 점근선 $y=\pm\frac{b}{a}x$가 있다.

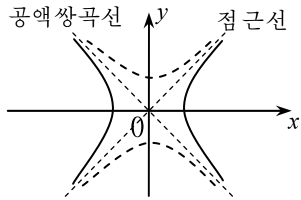


⑤ 쌍곡선의 리심률: 쌍곡선에서 $e=\frac{c}{a}$를 쌍곡선의 **리심률**이라고 부른다.

쌍곡선에서는 $c>a>0$ 이므로 $e>1$ 이다. e가 클수록 쌍곡선의 가지는 벌어지며 $e\to1$이면 가지는 접근한다.

⑥ 쌍곡선의 준선: 쌍곡선에서도 $\ell : x = \pm\frac{a}{e}$ 인 직선을 쌍곡선의 **준선**이라고 부른다. 쌍곡선의 준선은 $e > 1$ 이므로 쌍곡선가지안에 놓인다. 쌍곡선의 점으로부터 초점까지의 거리와 준선까지의 거리의 비는 일정하다.





⑦ 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 로 표시되는 쌍곡선을 주어진 쌍곡선의 **공액쌍곡선**이라고 부른다.

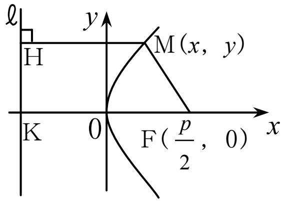
[포물선]

평면에서 정해진 점 F와 주어진 직선 ℓ까지의 거리가 같은 점 M들의 모임을 **포물선**이라고 부른다.

이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 ℓ을 포물선의 **준선**이라고 부른다.

[포물선의 방정식]

— **포물선의 표준방정식**



$KF = p$ 라고 하면 초점이 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 준선이 $x = -\frac{P}{2}$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 2Px$$

이 방정식을 **포물선의 표준방정식**이라고 부른다.

— **포물선의 보조변수방정식**

포물선 $y^2 = 2px$ 에서 $y = t,\ t \in \mathrm{R}$ 로 놓으면

$$x = \frac{t^2}{2p},\ t \in \mathrm{R}$$

따라서 포물선의 보조변수방정식은

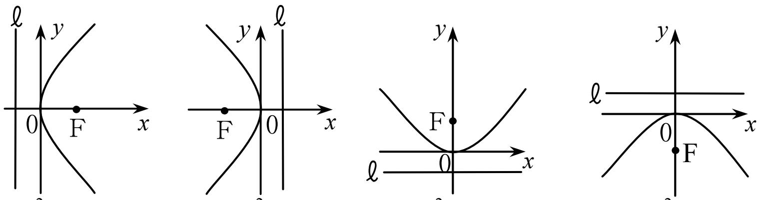
$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$$

[포물선의 기하학적성질]

① 포물선 $y^2 = 2px$ 에서 $(\pm y)^2 = 2px$ 이므로 x 축이 대칭축이라는것을 알수 있다.

② 포물선과 대칭축과의 사귐점을 포물선의 **정점**이라고 부른다.

③ 포물선 $y^2 = 2px$ 는 p 에 따라 다음과 같은 모양을 가진다.



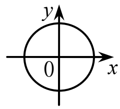
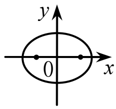
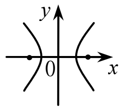
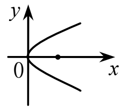
$y^2=2px$ $p>0$ | $y^2=2px$ $p<0$ | $x^2=2py$ $p>0$ | $x^2=2py$ $p<0$

또한 포물선의 방정식은 $x^2 = 2py$ 와 같이 구할수도 있다.

포물선 $x^2 = 2py$ 에서는 y 축이 대칭축이다.

④ 포물선의 **리심률**은 포물선의 점으로부터 초점까지의 거리와 준선까지의 거리의 비로 정의되는데 그것은 늘 $e = 1$ 이다.

[종합적으로 본 원뿔곡선]

	원	타 원	쌍곡선	포물선
기하학적 조건	주어진 점까지 거리가 같다	주어진 두 점까지 거리합이 상수다	주어진 두 점까지 거리의 차가 상수다	주어진 점과 주어진 직선까지의 거리가 같다
표준 방정식	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
도형				
정점의 자리표		$(\pm a,\ 0),(0,\ \pm b)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ 0)$
대칭축	x축, y축 (길이 $2a$)	x축(긴반경 길이 $2a$) y축(짧은반경 길이 $2b$)	x축(실축길이 $2a$) y축(허축길이 $2b$)	x축
초점의 자리표	$(0,\ 0)$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$
리심률	0	$0<e<1$	$e>1$	$e=1$
준선의 방정식		$x=\pm\frac{a}{e}$	$x=\pm\frac{a}{e}$	$x=-\frac{p}{2}$
점근선의 방정식			$y=\pm\frac{b}{a}x$	

[자리표계의 변화]

자리표계 $\{O:\ x,\ y\}$를 벡트르 $\overrightarrow{OO_1}$에 의하여 새 자리표계 $\{O_1:\ x_1,\ y_1\}$로 평행이동하였을 때 자리표변환식은

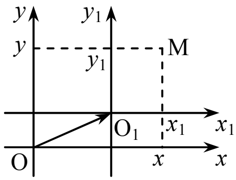
$$\begin{cases} x=x_1+a \\ y=y_1+b \end{cases}$$

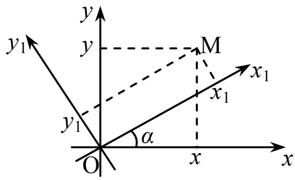
이다.

자리표계 $\{O:\ x,\ y\}$를 자리표원점주위로 α만큼 회전시켜 새 자리표계 $\{O: x_1, y_1\}$로 변환하였을 때 자리표변환식은

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

이다.





[원뿔곡선(2차곡선)의 표준화]

원뿔곡선(2차곡선)은 일반적으로 다음과 같은 모양을 가진다.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

평행이동, 회전이동에 의하여 원뿔곡선의 방정식을 표준방정식으로 만드는것을 2차곡선의 방정식을 **표준화한다**고 말한다.

원뿔곡선의 방정식을 표준화하기 위하여

① 먼저 자리표계를 회전이동할 때의 자리표변환식

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

에 의하여 주어진 방정식을 새 변수방정식으로 바꾸고 x_1y_1이 들어있는 마디의 결수가 0으로 되는 각 α를 정한다. 즉

$$-(A - C)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$$

의 풀이로 되는 α를 정한다.

이때 자리표계 $\{O:\ x,\ y\}$를 α만큼 회전이동한 새 자리표계 $\{O: x_1, y_1\}$에서 원뿔곡선의 방정식에는 x_1y_1의 마디가 없어진다.

② 다음에 새로 얻어진 방정식을

$$\frac{(x_1-a)^2}{a_1^2}\pm\frac{(y_1-b)^2}{b_1^2}=1$$

또는 $(x_1-a)^2=2P(y_1-b)$, $(y_1-b)^2=2P(x_1-a)$ 모양으로 고치고 여기에 평행이동에서의 자리표변환식

$$\begin{cases} x=x_1+a \\ y=y_1+b \end{cases}$$

를 갈아넣는다.

[례] 원뿔곡선의 방정식 $x^2-xy+y^2+2x-4y=0$ 에서 $A=C=1$ 이므로 $\cos 2\alpha=0$ 되는 α 로 회전이동하면 x_1y_1 이 든 마디가 없어지게 된다. $\alpha=45^\circ$ 되게 잡으면 자리표변환식은

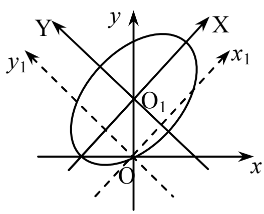
$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1) \end{cases}$$

로 된다. 이것을 주어진 곡선의 방정식에 갈아넣으면

$$\frac{1}{2}(x_1-y_1)^2-\frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2)+\frac{1}{2}(x_1+y_1)^2+$$
$$+\sqrt{2}(x_1-y_1)-2\sqrt{2}(x_1+y_1)=0$$

이 방정식의 왼변을 변형하고 정돈하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{(x_1-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{8})^2}+\frac{(y_1-\sqrt{2})^2}{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2}=1$$



따라서 평행이동의 자리표변환식

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{X} + \sqrt{2} \\ y_1 = \mathrm{Y} + \sqrt{2} \end{cases}$$

을 이 마지막 방정식에 갈아넣으면 타원의 표준방정식

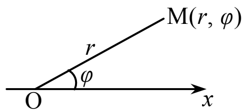
$$\frac{\mathrm{X}^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2} = 1$$

을 얻는다.

[극자리표계]

평면에서 한 점 O와 이 점을 지나는 축 x가 정해지면 평면에는 극자리표계가 정해졌다고 말하고 점 O를 **극점**, x축을 **극축**이라고 부른다.

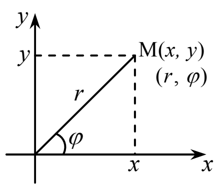
극자리표계가 정해진 평면의 점 M에 대하여 극점 O로부터 M까지의 거리 r를 점 M의 **극반경**이라고 부른다.



축 x와 반직선 OM사이의 각 $\varphi(0 \le \varphi < 2\pi)$를 이 점의 **극각**이라고 부르고 두 수의 렬 (r, φ)를 점 M의 **극자리표**라고 부르고 M(r, φ)로 표시한다.

[극자리표와 직각자리표사이의 관계]

극축을 x축으로 하고 극점을 자리표원점으로 하는 직각자리표계를 정하고 점 M의 직각자리표를 (x, y), 극자리표를 (r, φ)라면



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

［례］ 극자리표로 주어진 점 $M\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$의 직각자리표는

$$x = 4\cos\frac{2\pi}{3} = -2$$

$$y = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

이므로 점 M의 직각자리표는 $(-2,\ 2\sqrt{3})$이다.

［례］ 직각자리표로 주어진 점 $M(1, -\sqrt{3})$의 극자리표는

$$r = \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

이고 점 M이 4사분구의 점이므로 $\varphi = \frac{5\pi}{3}$

따라서 점 M의 극자리표는 $\left(2,\ \frac{5\pi}{3}\right)$이다.

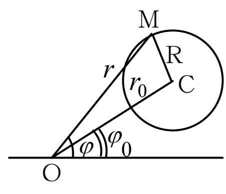
[원뿔곡선의 극방정식]

극자리표계가 정해진 평면에서 어떤 도형 F의 매 점의 극자리표가 두 변수 r, φ에 관한 방정식 $f(r, \varphi)=0$에 맞으며 도형 F밖에 있는 점의 극자리표가 이 방정식에 맞지 않으면 방정식 $f(r, \varphi)=0$을 도형 F의 **극방정식**이라고 부른다.

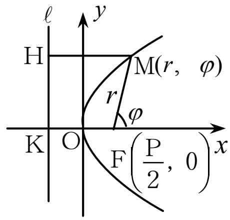
［례］ 중심의 극자리표가 $C(r_0, \varphi_0)$이고 반경이 R인 원둘레의 극방정식은

$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) + r_0^2 = R^2$$

특히 원둘레의 반경이 R이고 직경 OA의 한 끝점 O가 극점이고 극축은 $\overrightarrow{OA}$ 방향을 가질 때 원둘레의 극방정식은 $r = 2R\cos\varphi$이다.



[례] 포물선의 준선이 ℓ, 초점이 F, F로부터 ℓ까지의 거리는 P라고 하자.



초점 F를 극점, 포물선의 대칭축을 극축으로 할 때 포물선의 극방정식은

$$r=\frac{\mathrm{P}}{1-\cos\varphi}$$

이다.

상식

리만(1826-1866, 도이췰란드)

리만은 《리만기하학》의 창시자로 이름이 높다. 그는 결핵으로 40년밖에 살지 못하였지만 리만적분, 복소수함수론, 미분방정식론, 리만기하학, 합렬론 등 여러 수학령역에서 특출한 공적을 남기였다.

리만은 1862년에 이딸리아로 료양하러 떠났다가 1866년 거기서 돌아오지 못하고 사망하였다.

4. 공간에서 평면과 직선의 방정식

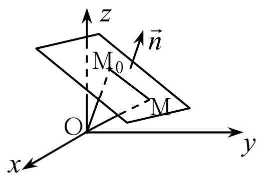
[도형의 방정식]

x, y, z 에 관한 방정식을 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 이라고 할 때 모임 $\Phi=\{(x, y, z)|\mathrm{F}(x, y, z)=0\}$ 을 방정식 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 으로 정해지는 도형 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 을 **도형 Φ 의 방정식**이라고 부른다. 즉

$$\mathrm{M}(x, y, z)\in\Phi \Leftrightarrow \mathrm{F}(x, y, z)=0$$

일 때 $\mathrm{F}(x, y, z)=0$ 을 **도형 Φ의 방정식**이라고 부른다.

[법선벡토르에 의한 평면의 방정식]



평면에 수직인 벡토르 $\vec{n}$ 을 그 평면의 **법선벡토르**라고 부른다.

점 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 을 지나며 법선벡토르가 $\vec{n}=\{A,\ B,\ C\}$ 인 평면의 방정식은

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 이다.

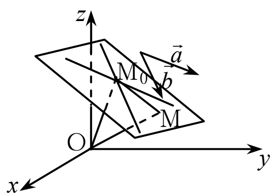
이 방정식을 **법선벡토르에 의한 평면의 방정식**이라고 부른다.

[사귀는 두 직선을 포함하는 평면의 방정식]

점 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 을 지나며 사귀는 두 직선의 방향벡토르가 $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ 인 평면의 방정식은

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0 \text{ 이다.}$$



이 방정식을 **사귀는 두 직선을 포함하는 평면의 방정식** 또는 **방향벡토르에 의한 평면의 방정식**이라고 부른다.

［레］ 점 $M_0(2,\ -5,\ 1)$ 을 지나며 벡토르 $\vec{a}=\{1,\ 4,\ 7\}$, $\vec{b}=\{-4,\ 5,\ -2\}$ 에 평행인 평면의 방정식은

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 1 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix}=0$$

이므로 구하려는 평면의 방정식은

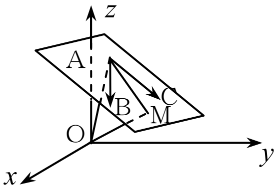
$$43x+26y-21z+65=0$$

[세 점을 지나는 평면의 방정식]

세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ 을 지나는 평면의 방정식은

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \text{ 이다.}$$

[례] 세 점 A(1, 2, 3), B(2, 1, 2), C(3, 3, 1)를 지나는 평면의 방정식은



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 1-3 \end{vmatrix}=0$$

이다.

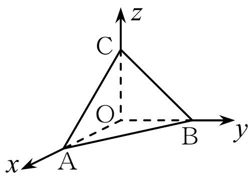
행렬식을 계산하여 정리하면

$$x+z-4=0$$

이것이 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식이다.

[단편에 의한 평면의 방정식]

평면이 자리표축과 사귀는 점들을 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ 이라고 할 때 a, b, c 를 각각 x **단편**, y **단편**, z**단편**이라고 부른다.



단편이 a, b, c 인 평면의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 이다.

[평면의 일반방정식]

x, y, z 에 관한 1차방정식

$$Ax+By+Cz+D=0$$

을 **평면의 일반방정식**이라고 부른다.

여기서 A, B, C 는 동시에 령이 아니며 벡토르 $\vec{n}=\{A, B, C\}$ 는 평면의 법선벡토르가 된다.

— **평면의 일반방정식의 특수경우들**

· D＝0이면 방정식은 $Ax+By+Cz=0$

이것은 자리표원점을 지나는 평면이다.

· C＝0이면 방정식은 $Ax+By+D=0$

이것은 z축에 평행인 평면이다.

· A＝0 또는 B＝0이면 방정식은

$$By+Cz+D=0$$

$$Ax+Cz+D=0$$

이것들은 각각 x축 또는 y축에 평행인 평면이다.

· C＝D＝0이면 방정식은

$$Ax+By=0$$

이것은 z축을 포함하는 평면이다.

A＝D＝0 또는 B＝D＝0이면 방정식은

$$By+Cz=0$$

$$Ax+Cz=0$$

이것들은 각각 x축 또는 y축을 포함하는 평면이다.

· B＝C＝0이면 방정식은

$$Ax+D=0$$

이것은 x축에 수직인 평면이다.

A＝C＝0 또는 A＝B＝0이면 방정식은

$$By+D=0$$

$$Cz+D=0$$

이것들은 각각 y축, z축에 수직인 평면이다.

· A＝B＝D＝0이면 방정식은

$$Cz=0 \quad 즉 \quad z=0\ (C\neq 0)$$

이것은 xOy평면과 일치하는 평면이다.

A＝C＝D＝0, B＝C＝D＝0이면 방정식은

$$By=0 \quad 즉 \quad y=0$$

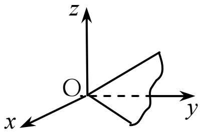
$$Ax=0 \quad 즉 \quad x=0$$

이것들은 xOz, yOz 평면과 일치하는 평면이다.

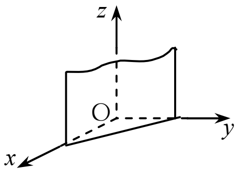
· A, B, C, D가 모두 0이 아니면 방정식은

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

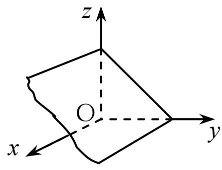
이것은 어느 자리표축에도 평행이 아니며 자리표원점도 지나지 않는 평면이다.



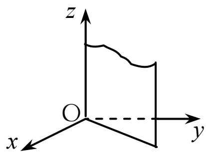
D＝0



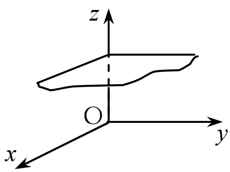
C＝0



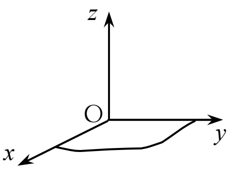
A＝0



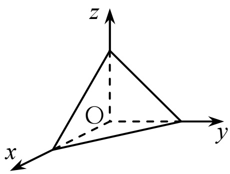
C＝D＝0



A＝B＝0



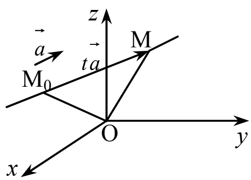
A＝B＝D＝0



A, B, C, D 가
모두 령이 아니다

[직선의 보조변수방정식]

주어진 직선에 평행이거나 직선에 놓이는 벡토르를 그 직선의 **방향벡토르**라고 부른다.



점 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나며 방향벡토르가 $\vec{a} = \{m, n, p\}$ 인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (t\text{는 보조변수})$$

이 방정식을 직선의 **보조변수방정식**이라고 부른다.

[직선의 표준방정식]

점 $M_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나며 방향벡토르가 $\vec{a}=\{m, n, p\}$인 직선의 방정식은 보조변수방정식에서 t를 소거하면 다음과 같은 모양으로도 될수 있다.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

이 방정식을 **방향벡토르에 의한 직선의 방정식** 또는 **직선의 표준방정식**이라고 부른다.

［례］ 점 A(2, -1, 3)를 지나며 방향벡토르가 $\vec{a}=\{4, 3, -2\}$인 직선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t\,, \quad t\in \mathrm{R} \\ z=3-2t \end{cases}$$

이므로 직선의 표준방정식은

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$$

이다.

[직선의 일반방정식]

두 평면

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \;:\; P_1$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \;:\; P_2$$

이 평행이 아니면 그의 사귐선은 직선이다.

두개의 세변수1차방정식으로 된 련립방정식

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

을 공간에서 **직선의 일반방정식**이라고 부른다.

5. 곡면의 방정식

[곡면의 방정식]

직각자리표계가 도입된 공간에서 곡면 S의 임의의 점 M의 자리표 x, y, z가 방정식

$$\mathrm{F}(x,\ y,\ z)=0 \qquad (*)$$

을 만족시키고 거꾸로 방정식 (*)을 만족시키는 x, y, z를 자리표로 하는 점 $\mathrm{M}(x,\ y,\ z)$가 곡면 S에 놓일 때 방정식 (*)을 **곡면 S의 방정식**이라고 부른다.

$$\mathrm{M}(x,\ y,\ z)\in \mathrm{S} \Leftrightarrow \mathrm{F}(x,\ y,\ z)=0$$

[구면의 방정식]

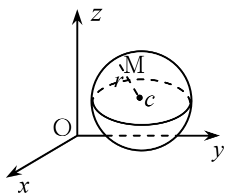
공간에서 한 점 C로부터 r만 한 거리에 있는 점들의 모임

$$\mathrm{F}=\{\mathrm{M}|\mathrm{CM}=r\}$$

를 중심이 C이고 반경이 r인 **구면**이라고 부른다.

중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반경이 r인 구면의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



특히 중심이 자리표원점에 있고 반경이 r인 구면의 방정식은

$x^2+y^2+z^2=r^2$이다.

일반적으로 구면의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \qquad (**)$$

으로 표시할수 있다.

이것을 $(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d$로 쓰면 $a^2+b^2+c^2-d>0$일 때 이 식은 중심이 $(-a,\ -b,\ -c)$에 있고 반경이 $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$인 구면을 표시한다.

(**)를 **구면의 일반방정식**이라고 부른다.

구면의 일반방정식은 x^2, y^2, z^2의 결수들이 모두 갈고 xy, xz, yz를 포함하는 마디가 없는것이 특징이다.

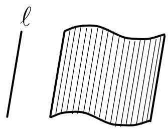
[기둥면의 방정식]

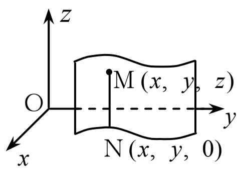
주어진 직선 ℓ에 평행인 직선이 정해진 곡선 L을 따라 움직이면서 그리는 면을 **기둥면**이라고 부른다. 이때 L을 기둥면의 **도선**, ℓ에 평행이며 L의 점을 지나는 직선을 기둥면의 **모선**, 그리고 직선 ℓ을 **기준선**이라고 부른다.

모선이 z축에 평행이며 도선 L이 xOy평면에서 방정식 $f(x, y)=0$ 으로 주어졌을 때 기둥면의 방정식은 $f(x, y)=0$ 모양으로 된다.

이때 도선의 방정식은

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$ 이다.





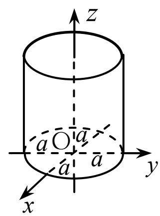
[례] z축을 기준선으로 하는 원기둥면, 타원기둥면, 쌍곡기둥면, 포물기둥면의 방정식은 각각 다음과 같다.

– **원기둥면의 방정식**

$$x^2+y^2=a^2$$

이때 도선의 방정식은

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$$

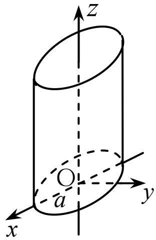


— **타원기둥면의 방정식**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이때 도선의 방정식은

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

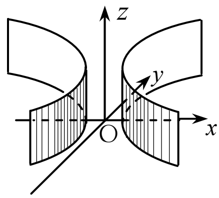


— **쌍곡기둥면의 방정식**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

이때 도선의 방정식은

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

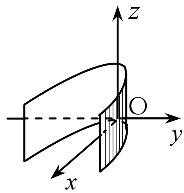


— **포물기둥면의 방정식**

$$y^2=2px$$

이때 도선의 방정식은

$$\begin{cases}y^2=2px\\ z=0\end{cases}$$

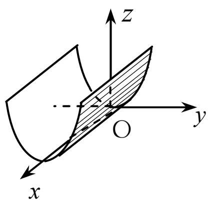


마찬가지로 x 축을 기준선으로 하고 도선이 yOz 평면에 놓여있는 포물기둥면의 방정식은

$$f(y,\ z)=0$$

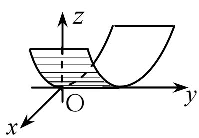
도선의 방정식은

$$\begin{cases}f(y,\ z)=0\\ x=0\end{cases}$$



y 축을 기준선으로 하고 도선이 xOz 평면에 놓여있는 포물기둥면의 방정식은

$$f(x,\ z)=0$$



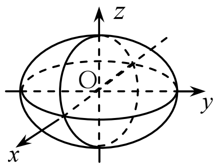
도선의 방정식은

$$\begin{cases} f(x,\ z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

[타원면의 방정식]

방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 로 표시되는 곡면을 **타원면**이라고 부르며 이 방정식을 **타원면의 방정식**이라고 부른다.

타원면을 xOy 평면($z=0$)으로 자르면



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

즉 타원을 얻는다.

또 타원면을 xOz 평면($y=0$)으로 자르면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

즉 타원을 얻는다.

마찬가지로 타원면을 yOz 평면($x=0$)으로 자르면

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

즉 타원을 얻는다.

제10장. 순렬과 조합

1. 순렬과 중복순렬

[렬]

어떤 유한모임에서 몇개의 원소를 잡아서 일정한 차례로 늘여놓은것을 **렬**이라고 부른다.

［례］ 모임 $\{a, b, c\}$에서 2개씩 잡는 렬은

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{b, a\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$이다.

두 렬은 그것들을 각각 이루고있는 원소들도 같고 그 원소들의 차례도 같을 때에만 같은것으로 본다.

[순렬]

n개의 서로 다른 원소에서 $k(k \le n)$개의 원소를 일정한 순서에 따라 배렬한것을 서로 다른 n개의 원소에서 k개의 원소를 취한 **순렬**이라고 부르며 그 총수를 다음과 같이 표시한다.

$$\mathrm{P}_n^k$$

$$\mathrm{P}_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

［례］ $\mathrm{P}_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$

$\mathrm{P}_5^5 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$\mathrm{P}_m^m = m(m-1)(m-2)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$

우의 공식에서 $k = n$이면 즉 n개의 원소를 다 잡아서 만든 순렬의 총 개수 P_n^n은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 적 $1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$을 n**차례곱**이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$n\,!$$

즉 $$n\,! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$$

차례곱의 기호를 쓰면 $P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ 이므로

$$P_n^n = n!$$

$k<n$ 일 때

$$P_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

즉 $$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

이 공식이 $k=n$ 일 때도 성립하게 하자면 $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$ 이므로 0!＝1로 정하기로 한다.

［례］ 수자 1, 2, 3, …, 9를 가지고 서로 다른 수자로 된 네자리수는 9개에서 4개를 잡는 순렬의 총개수와 같다. 즉

$$P_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024 \text{ (개)}$$

［례］ 같기식 $P_n^k = nP_{n-1}^{k-1}$ 를 증명하여라.

증명. $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!} = nP_{n-1}^{k-1}$

［례］ 6명의 이어달리기선수가 있다. 이가운데서 4명을 뽑아서 이어달리기경기에 내보내려고 한다. 달리는 차례까지 정한다면 달리기조를 짜는 방법에는 몇가지가 있겠는가?

풀이. 4명의 선수를 뽑아 달리는 차례까지 정하여 조를 짜면 이것은 6개의 원소에서 4개 잡는 순렬로 된다.

따라서 조를 짜는 방법의 수는

$$P_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$ 답. 360가지

［례］ 서로 다른 수자로 되여있는 세자리수는 모두 몇 개인가?

풀이. 10개의 수자 0, 1, 2, …, 9를 가지고 서로 다른 세 수자로 된 렬은 P_{10}^{3}개 만들수 있다. 그런데 이렇게 만든 렬들가운데는

037, 081, 054

등과 같이 세자리수가 아닌것들이 들어있다. 이와 같은 렬의 수는 9개의 수자 1, 2, …, 9가운데서 2개씩 잡은 렬의 수 P_{9}^{2}와 같다.

따라서 서로 다른 수자로 된 세자리수의 총수는

$$P_{10}^{3}-P_{9}^{2}=10\cdot9\cdot8-9\cdot8=648$$

답. 648개

[치환]

서로 다른 n개의 원소를 모두 취하여 만든 순렬을 n개의 원소로 이루어진 **치환**이라고 부른다.

n개의 원소의 치환의 총수를 P_n으로 표시한다.

치환의 정의에 의하여

$$P_n=P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\ \cdots\ \cdot2\cdot1$$

또는 $$P_n=n!$$

［례］ $P_5=P_5^5=5!=120$

$P_3=P_3^3=3!=6$

［례］ 방정식 $P_x^3=xP_3$을 풀면

$$x(x-1)(x-2)=x\cdot3\cdot2\cdot1$$

x는 자연수 즉 0이 아니므로 두 변을 x로 나누어

$$(x-1)(x-2)=6$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$x_1=4\quad x_2=-1$$

여기서 $x_2=-1$은 버린다.

[중복순렬]

모임 $\overline{M}$ 을 n개의 서로 다른 원소 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 이 얼마든지 중복되여있는 모임이라고 하자.

모임 $\overline{M}$ 에서 r (같은 원소가 중복될수 있다.)개의 원소를 잡아서 만든 순렬을 n 개의 원소에서 r 개의 원소를 취한 **중복순렬**이라고 부르고 그 총수를 기호 $\prod_n^r$ 로 표시한다.

n 개의 원소에서 r 개씩 취하여 만든 중복순렬의 총수는 n^r 이다.

즉 $\prod_n^r = n^r$

［례］ $\prod_5^3 = 5^3 = 125$

［례］ 수자 1, 2, $\cdots$, 9로 만들수 있는 두자리수의 총수는

$$\prod_9^2 = 9^2 = 81 \text{ (개)}$$

여기에 10부터 90까지의 10의 배수 9개를 더하면 두자리자연수는 모두 81＋9＝90개이다.

［례］ 서로 다른 4개의 수 1, 2, 3, 4로 세자리수를 만들기 위해서는 중복을 허용하여야 한다. 따라서 세자리수의 총수는

$$\prod_4^3 = 4^3 = 64 \text{ (개)}$$

[중복치환]

원소 a_1 이 k_1 개, a_2 이 k_2 개, $\cdots$, a_n 이 k_n 개 들어간 그 총수가 m 개인 모임을 생각하자.

이 모임의 원소들을 모두 취하여 만든 중복순렬을 중복도수 m 인 **중복치환**이라고 부르고 그 총수를 $\overline{P_m}$ 로 표시한다.

원소 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 이 각각 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 번 중복들어있는 모임의 전체 원소로 된 서로 다른 중복치환의 총수는

$$\overline{P_m} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} = \frac{m!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

［례］ 수자 1, 1, 1, 2, 3, 4를 가지고 만들수 있는 여섯자리수는

$$k_1=3,\quad k_2=1,\quad k_3=1,\quad k_4=1$$

$$\overline{\mathrm{P}_{3+1+1+1}}=\frac{(3+1+1+1)!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{6!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6=120\ (\text{개})$$

［례］ 어느 학교에 12명의 배구선수가 있다. 김동무와 리동무가 서로 다른 조에 들어가도록 두 팀으로 나누는 방법은 모두 몇가지인가?

풀이. 김동무와 리동무를 내놓고 나머지 10명을 5명씩 두조로 나누고 김동무와 리동무가 각각 다른 조에 들어가면 두 팀이 구성된다.

이렇게 생각하면 결국 10명을 5명씩 나누는 문제로 된다. 그런데 매 선수는 두조가운데서 어느 한조에 들어가며 같은 조에 들어가는 선수들은 같은 대상으로 생각하자. 그러면 5명씩 두조로 나누는 방법의 총수는

$$\overline{\mathrm{P}_{10}}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{5!\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!\cdot 5!}=252$$

답. 252가지

2. 조합과 중복조합

[조합]

n개의 원소가운데서 $k(k\leq n)$개의 원소를 취하되 순서를 고려하지 않은 매개 렬을 n개의 원소에서 k개를 취한 **조합**이라고 부르고 그 총수를 다음과 같이 표시한다.

$$\mathrm{C}_n^k$$

조합의 총수 C_n^k를 구하는 공식

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{P}_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot k}$$

[례] $C_3^2 = \frac{P_3^2}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$

$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$

[례] 40개의 제품이 들어있는 제품상자에서 3개의 제품을 꺼내여 검사한다. 3개의 제품을 꺼내는 방법은 몇가지 있는가?

풀이. 제품을 꺼내는 방법의 수는 40개의 원소에서 3개씩 잡은 조합의 총수와 같으므로

$$C_{40}^3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9880$$

답. 9 880가지

$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 이라는것을 고려하면 다음 공식을 얻는다.

$k = 0$ 일 때

$$C_n^0 = \frac{P_n^0}{0!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

이므로 우의 공식은 $k = 0$ 일 때도 성립한다.

즉 $C_n^0 = 1$ 로 정하기로 한다.

[조합 C_n^k 의 성질]

① $C_n^k = C_n^{n-k}$

② $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

[례] $C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{2!} = 4950$

[례] $C_{10}^r = C_{10}^{r-2}$ 에 맞는 r 는 $C_{10}^r = C_{10}^{10-r}$ 이므로

$$C_{10}^{10-r} = C_{10}^{r-2}$$

이로부터 $10 - r = r - 2$

따라서 $r = 6$

[중복조합]

n개의 서로 다른 원소 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이 얼마든지 중복되여 들어있는 모임 $\overline{\mathrm{M}}$에서 r개의 원소(같은 원소가 있을수 있다.)를 뽑아서 만든 부분모임을 n개의 원소에서 r개 취한 **중복조합**이라고 부르고 그 총수를 기호 $\overline{\mathrm{C}_n^r}$로 표시한다.

［례］ 4개의 글자 a, b, c, d가운데서 같은 글자의 중복을 허용하면서 3개의 글자씩 취한 중복조합을 만들면

aaa, aab, aac, aad
abb, abc, abd, acc
acd, add, bbb, bba
bbc, bbd, bcc, bcd
ccc, cca, ccb, ccd

즉 $\overline{\mathrm{C}_4^3}=20$

서로 다른 n개의 원소에서 r개의 원소를 취하여 만든 중복조합의 총수는

$$\overline{\mathrm{C}_n^r}=\mathrm{C}_{n+r-1}^r$$

$$\overline{\mathrm{C}_n^r}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

우의 례에서는

$$\overline{\mathrm{C}_4^3}=\mathrm{C}_{4+3-1}^3=\frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}=20$$

［례］ $\overline{\mathrm{C}_3^2}=\mathrm{C}_{3+2-1}^2=\frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!}=6$

$$\overline{\mathrm{C}_5^3}=\mathrm{C}_{5+3-1}^3=\frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!}=35$$

3. 뉴톤의 2마디공식

[뉴톤의 2마디공식]

이제 $(a+b)^n$ (n은 자연수)의 전개식에 대하여 보자.

2마디식의 곱하기공식

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

은 이미 알고있다. 오른변의 전개식에서 곁수들을 조합의 총수를 표시하는 기호를 써서 표시하면 다음과 같은 전개식을 얻는다.

$$(a+b)^2 = \mathrm{C}_2^0 a^2 + \mathrm{C}_2^1 ab + \mathrm{C}_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = \mathrm{C}_3^0 a^3 + \mathrm{C}_3^1 a^2b + \mathrm{C}_3^2 ab^2 + \mathrm{C}_3^3 b^3$$

이 전개식으로부터 일반적으로 $(a+b)^n$의 전개식의 모양을 짐작할수 있다.

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n$$

이 같기식을 **뉴톤의 2마디공식**이라고 부르며 오른변을 $(a+b)^n$의 **전개식**, 매개 마디의 곁수

$$\mathrm{C}_n^0,\ \mathrm{C}_n^1,\ \mathrm{C}_n^2, \cdots,\ \mathrm{C}_n^k,\ \cdots,\ \mathrm{C}_n^{n-1},\ \mathrm{C}_n^n$$

들을 **2마디곁수**라고 부른다.

수학적귀납법으로 뉴톤의 2마디공식을 증명하자.

1) $n=1$일 때는 $(a+b)^1 = \mathrm{C}_1^0 a + \mathrm{C}_1^1 b$가 성립하므로 명제가 옳다.

2) $n=k$일 때 명제가 옳다고 하자. 즉

$$(a+b)^k = \mathrm{C}_k^0 a^k + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1}b + \mathrm{C}_k^2 a^{k-2}b^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^k b^k$$

가 성립한다고 하자.

그러면

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$$
$$=(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)(a+b)$$
$$=C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+C_k^2a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^kab^k+C_k^0a^kb+$$
$$+C_k^1a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^{k-1}ab^k+C_k^kb^{k+1}$$
$$=C_k^0a^{k+1}+(C_k^0+C_k^1)a^kb+(C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2+\cdots+$$
$$+(C_k^{k-1}+C_k^k)ab^k+C_k^kb^{k+1}$$

그런데

$$C_k^0=C_{k+1}^0=1,\quad C_k^k=C_{k+1}^{k+1}=1,\quad C_k^i+C_k^{i+1}=C_{k+1}^{i+1}$$

이 서므로

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+$$
$$+\cdots+C_{k+1}^kab^k+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$

즉 $n=k+1$일 때도 명제가 옳다.

따라서 이 명제는 모든 자연수 n에 대하여 옳다.

［례］ $(a+b)^6$을 전개하면

$$(a+b)^6=C_6^0a^6+C_6^1a^5b+C_6^2a^4b^2+C_6^3a^3b^3+C_6^4a^2b^4+$$
$$+C_6^5ab^5+C_6^6b^6$$
$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$(a-b)^5$을 전개하면

$$(a-b)^5=[a+(-b)]^5=C_5^0a^5+C_5^1a^4(-b)+C_5^2a^3(-b)^2+$$
$$+C_5^3a^2(-b)^3+C_5^4a(-b)^4+C_5^5(-b)^5$$
$$=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

[뉴톤의 2마디공식의 성질]

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

1) a의 차수는 n부터 0까지 차례로 낮아지며 b의 차수는 0부터 n까지 차례로 높아진다.

마디의 수는 $n+1$개이다.

2) $r+1$번째 마디의 결수는 C_n^r, 오른쪽으로부터 $r+1$번째 마디의 결수는 C_n^{n-r}이다.

그런데 $C_n^r = \mathrm{C}_n^{n-r}$이므로 전개식의 두끝에서부터 같은 번호에 있는 마디의 결수는 같다.

례컨대 $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

3) $r+1$번째 마디는

$$\mathrm{T}_{r+1} = \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r$$

이다. 이것을 **일반마디**라고 부른다.

［례］ $(a+\sqrt{b})^{12}$의 전개식에서 9번째마디는

$$\mathrm{T}_9 = \mathrm{C}_{12}^8 a^{12-8}(\sqrt{b})^8 = 495a^4b^4$$

4) $r+1$번째 마디의 결수는 C_n^r, $r+2$번째 마디의 결수는 C_n^{r+1}이다. 이 결수들 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\mathrm{C}_n^{r+1} = \frac{n!}{(r+1)![n-(r+1)]!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}\cdot\frac{n-r}{n-r}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{n-r}{r+1} = \mathrm{C}_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1}$$

즉 $$\mathrm{C}_n^{r+1} = \mathrm{C}_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1}$$

어떤 마디의 결수 C_n^r을 알고 다음 마디의 결수 C_n^{r+1}을 구하려면 그 결수 C_n^r에 a의 차수 $(n-r)$를 곱하고 마디의 번호 $(r+1)$로 나누면 된다.

5) 모든 2마디결수들의 합은 2^n이다. 즉

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

6) 홀수번째마디들의 2마디결수들의 합은 짝수번째마디들의 2마디결수들의 합과 같다. 즉

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$$

[2마디결수3각형]

2마디결수를 차례로 쓰면

$(a+b)^2$			C_2^0		C_2^1		C_2^2	
$(a+b)^3$		C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3
$(a+b)^4$	C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3	C_4^4
·········		·································						

그런데

$$C_2^0 + C_2^1 = C_3^1, \quad C_2^1 + C_2^2 = C_3^2, \quad C_3^0 + C_3^1 = C_4^1$$

$$C_3^1 + C_3^2 = C_4^2, \quad C_3^2 + C_3^3 = C_4^3$$

··············· ·················· ···············

이므로 $(a+b)^{n-1}$의 2마디결수를 알면 $(a+b)^n$의 2마디결수를 구할수 있다. 즉

$(a+b)^2$				1		2		1		
$(a+b)^3$			1		3		3		1	
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5	1

···

2마디결수들의 이와 같은 표를 **2마디결수3각형(파스칼 3각형)**이라고 부른다.

뉴톤의 2마디공식

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

에서 $a=1$, $b=1$ 이면

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$a=1$, $b=-1$ 이면

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

을 얻는다.

[뉴톤의 2마디공식을 리용한 근사계산]

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \cdots + x^n$$

이 전개식에서 x의 절대값이 충분히 작으면

$$\frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \cdots + x^n$$

의 값은 $1+nx$의 값에 비하여 훨씬 작다.

그러므로 이것을 무시하면 다음의 근사식을 얻는다.

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

［례］ $1.002^3 = (1+0.002)^3 \approx 1 + 3 \times 0.002 = 1.006$

[여러마디공식]

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

이것을 **여러마디공식**이라고 부른다.

여기서 n은 자연수, n_1, n_2, …, n_k 은 부 아닌 옹근수이고 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ 이다.

그리고 기호 $\sum$(시그마)는 우의 조건을 만족하는 모든 가능한

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$$

모양의 마디들의 합기호이다.

［례］ $(x+y+z)^3$ 을 전개하면

$$(x+y+z)^3=\sum\frac{3!}{n_1!n_2!n_3!}x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$$

이제 합이 3이 되도록 n_1， n_2， n_3 의 값을 정하는 가능한 모든 경우를 보자.

3，0，0　　0，3，0　　0，0，3　　2，1，0
2，0，1　　0，2，1　　1，2，0　　1，0，2
0，1，2　　1，1，1

그러므로 전개식은

$$(x+y+z)^3=\frac{3!}{3!0!0!}x^3+\frac{3!}{0!3!0!}y^3+\frac{3!}{0!0!3!}z^3+$$

$$+\frac{3!}{2!1!0!}x^2y+\frac{3!}{2!0!1!}x^2z+\frac{3!}{0!2!1!}y^2z+\frac{3!}{1!2!0!}xy^2+$$

$$+\frac{3!}{1!0!2!}xz^2+\frac{3!}{0!1!2!}yz^2+\frac{3!}{1!1!1!}xyz$$

$$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+z^2x+z^2y)+$$

$$+6xyz$$

제11장. 수 렬

1. 같은차수렬

[수렬]

일정한 규칙에 따라 늘여놓은 수들의 렬을 **수렬**이라고 부른다.

수렬을 이르는 매개 수를 그 수렬의 **마디**라고 부르며 처음부터 차례로 첫째 마디, 둘째 마디, 셋째 마디, …, n째 마디라고 부른다. 특히 n째 마디를 **일반마디**라고 부른다.

첫째 마디가 a_1, 둘째 마디가 a_2, …, n째 마디가 a_n인 수렬을 a_1, a_2, …, a_n 또는 간단히 (a_n)과 같이 표시한다.

마디가 몇개인가를 정할수 있는 수렬을 **유한수렬**, 마디가 끝없이 많은 수렬을 **무한수렬**이라고 부른다.

［례］ 1, 2, 3, …, 100 　(유한수렬)

2, 4, 6, …, $2n$, … (무한수렬)

일반마디가 알려지면 수렬은 정해진다.

［례］ 일반마디가 $a_n=\frac{n+1}{n}$인 수렬을 쓰면

$$a_1=\frac{1+1}{1}=2,\quad a_2=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2},\quad a_3=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3},\quad \cdots$$

따라서 수렬은 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ … 이다.

［례］ 무리수 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$의 소수점아래 n째 자리까지 잡은 값을 일반마디로 하는 수렬은

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142 …

수렬이 주어졌다고 하여 일반마디가 늘 주어지는것은 아니다.

[같은차수렬]

서로 이웃한 임의의 두마디에 대하여 뒤마디에서 앞마디를 던 차가 늘 같은 수렬을 **같은차수렬**이라고 부른다. 그리고 그 차를 **공통차**라고 부르고 d로 표시한다.

(a_n)： 같은차수렬$\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

［례］ 1，3，5，7，… 은 $a_{n+1}-a_n$이 늘 같으므로 같은차수렬이고 $d=2$이다.

[같은차수렬의 일반마디공식]

같은차수렬에서 첫째 마디 a_1과 공통차 d만 알면 그의 마디들을 구할수 있다.

일반마디는 다음 공식으로 표시된다.

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

［례］ 첫마디가 10 공통차가 −2인 같은차수렬의 21번째 마디는 $a_1=10$， $d=-2$， $n=21$이므로

$$a_{21}=10+(21-1)(-2)=-30$$

[같은차수렬의 성질]

① 유한같은차수렬에서 첫째 마디와 끌마디의 합은 량쪽으로부터 세여 같은 번째에 있는 마디들의 합과 같다.

즉 $a_k+a_{n-(k-1)}=a_1+a_n$

［례］ 같은차수렬

2，5，8，11，14，17

에서 $a_1+a_6=a_2+a_5=a_3+a_4=19$

② 같은차수렬에서 임의의 이웃한 세마디 a_{n-1}， a_n， a_{n+1}사이에는 관계식

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\quad n\geq 2$$

이 성립한다.

［례］ 같은차수렬 3, 6, 9, 12, 15, …에서

$$6=\frac{3+9}{2},\quad 9=\frac{6+12}{2},\quad 12=\frac{9+5}{2},\quad \cdots$$ 이다.

[같은차수렬의 합의 공식]

$$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\cdot n}{2}$$

［례］ 수렬 1, 2, 3, …, n의 합은 $a_1=1$, $a_n=n$, 마디의 수는 n이므로

$$S_n=\frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

2. 같은비수렬

[같은비수렬]

서로 이웃한 임의의 두마디에 대하여 뒤마디와 앞마디의 비가 늘 같은 수렬을 **같은비수렬**이라고 부른다. 그리고 그 비를 **공통비**라고 부르고 q로 표시한다.

(a_n): 같은비수렬 $\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (n=1, 2, \cdots)$

［례］ 수렬 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, … 은 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$이 늘 같으므로

같은비수렬이고 $q=\frac{1}{3}$이다.

[같은비수렬의 일반마디공식]

같은비수렬에서 첫째 마디 a_1과 공통비 q를 알면 그의 마디들을 구할수 있다.

즉

$$a_2=a_1\cdot q$$
$$a_3=a_2\cdot q=(a_1q)\cdot q=a_1q^2$$
$$a_4=a_3\cdot q=(a_1q^2)\cdot q=a_1q^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

따라서 일반마디는

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

[같은비수렬의 합의 공식]

같은비수렬 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 의 첫 n개 마디들의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

공통비를 q로 표시하면

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

두 변에 q를 곱하면

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \qquad (2)$$

(1)에서 (2)를 변끼리 덜면

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$(1-q)S_n = a_1(1-q^n)$$

$q \neq 1$이면

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

$q = 1$이면 (1)로부터

$$S_n = n \cdot a_1 \ \ (q=1)$$

즉 $$S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

[례] 수렬 2, 4, 8, 16, … 의 7째 마디까지의 합을 구하면 $a_1 = 2$, $q = 2$, $n = 7$이므로

$$S_7 = \frac{2 \cdot (1-2^7)}{1-2} = \frac{2-2^8}{-1} = 2^8 - 2 = 254$$

이다.

［례］ $a_1=\frac{1}{2}$， $a_6=\frac{1}{64}$ 인 같은비수렬의 처음 6개 마디의 합을 구하면

$$a_6=a_1q^5=\frac{1}{64} \text{ 이므로}$$

$$q^5=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad q=\frac{1}{2}$$

따라서 $S_6=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{63}{64}$

3. 여러가지 수렬

[몇가지 간단한 수렬의 합]

같은차수렬도 아니고 같은비수렬도 아닌 비교적 간단한 몇가지 수렬의 합을 구하자.

［례］ 수렬 (n^2)의 처음 n개 마디의 합

$$1^2+2^2+\cdots+n^2$$

을 구하여라.

풀이. 늘같기식

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

에서 $k=1$ 이면 $2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ 이면 $3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

… … …

$k=n$ 이면 $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

이 n개의 식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

이로부터

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

따라서 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

［례］ 수렬 (na^{n-1}) $(a\neq 1)$의 처음 n개 마디의 합

$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$을 구하여라.

풀이. 이 합을 S_n으로 표시하면

$$\begin{array}{rl} \mathrm{S}_n = & 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1} \\ -)\ a\mathrm{S}_n = & \quad\ a+2a^2+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n \\ \hline (1-a)\mathrm{S}_n = & 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}-na^n \end{array}$$

따라서 $\mathrm{S}_n=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$

이로부터

$$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}=\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}$$

[합기호 Σ]

수렬의 합을 표시하는데 기호 Σ(시그마)를 리용하면 간단하고 편리하다.

례를 들어

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

여기서 $\sum_{k=1}^{n}$ 은 k자리에 1부터 n까지의 자연수를 차례로 넣은것을 모두 더하라는 기호이다.

– **∑의 성질**

1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ （c 는 k 에 무관계한 수)

※ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 에서 $a_k = c$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 이면 c 를 n 개 더한것을 의미하므로 $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

특히 $c=1$ 이면 $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

제12장. 행렬식과 련립방정식

1. 행렬과 그 산법

행렬은 량들의 호상관계를 표시하는데 리용된다.

[행렬]

$m\times n$ 개의 수들로 m 개의 가로줄과 n 개의 세로줄의 사귐점들에 배렬한 직4각형모양의 표를 $(m,\ n)$ **형행렬**이라고 부른다.

행렬에서 가로줄을 **행**, 세로줄을 **렬**이라고 부른다.

[바른행렬]

행과 렬의 개수가 같은 행렬을 **바른행렬**이라고 부르며 $(n,\ n)$ 형바른행렬을 n **차행렬**이라고 부른다.

[례] $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2, 3)형행렬

$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ 3차행렬

행렬에 들어있는 매개 수를 그 행렬의 **원소**라고 부른다.

일반적으로 $(m,\ n)$ 형행렬을 다음과 같이 표시한다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

또는 간단히

$$A=(a_{ij})\quad \begin{cases} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases}$$

[같은행렬]

같은 형의 두 행렬 A와 B에서 같은 자리에 있는 원소들이 모두 같을 때 이 두 행렬은 **같다**고 말한다.

［례］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$에서

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \Leftrightarrow A=B$$

[행렬의 더하기]

같은 형의 두 행렬 A, B에서 같은 자리의 원소들끼리 더하여 얻은 행렬을 두 행렬 A와 B의 **합**이라고 부르고 이것을 $A+B$와 같이 표시한다.

［례］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$일 때

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

행렬의 더하기에서도 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다.

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

[령행렬]

모든 원소가 0인 행렬을 **령행렬**이라고 부르고 이것을 글자 O로 표시한다.

A가 임의의 형의 행렬이고 O가 A와 같은 형의 령행렬이면

$$A+O=O+A=A$$

가 성립한다.

［례］ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ -1+0 & 7+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

[행렬의 덜기]

행렬의 덜기도 수의 덜기에서처럼 더하기의 거꿀산법으로 정의하며 더하기에서와 같이 같은 자리의 원소들끼리 덜면 된다.

［례］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$일 때

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{pmatrix}$$

[반대행렬]

행렬 A의 모든 원소를 반대수로 바꾸어서 얻은 행렬을 A의 **반대행렬**이라고 부르고 이것을 –A로 표시한다.

어떤 행렬에 대해서나 $A+(-A)=O$

그리고 $A-B=A+(-B)$

[행렬에 수를 곱하기]

행렬 A의 매개 원소에 수를 곱하여 얻은 행렬을 행렬 A에 수 k를 곱한 **적**이라고 부르고 이것을 kA와 같이 표시한다.

［례］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 일 때 $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$

어떤 행렬 A에 대해서나

$$1\cdot A=A,\quad -1\cdot A=-A$$

$$0\cdot A=O,\quad A\cdot 0=O$$

[행렬의 곱하기]

$(m,\ p)$형행렬 A와 $(p,\ n)$형행렬 B에 대하여 행렬 A의 i째 행의 원소들과 행렬 B의 j째 렬의 원소들을 차례로 하나씩 곱하여 더한 합 C_{ij}를 원소로 하는 $(m,\ n)$형행렬 C를 두 행렬 A와 B의 **적**이라고 부르고 이것을 AB와 같이 표시한다.

$$C=AB$$

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj} \quad \begin{cases} i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases}$$

※ 행렬의 곱하기는 첫째 행렬의 렬의 개수와 둘째 행렬의 행의 개수가 같은 경우에만 할수 있다.

$$(m,\ p)\text{형행렬}\times(p,\ n)\text{형행렬}=(m,\ n)\text{형행렬}$$

［례］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$일 때

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

［례］ $D=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1\times4+5\times1 & 1\times2+5\times5 & 1\times(-6)+5\times(-3) \\ -4\times4+2\times1 & -4\times2+2\times5 & -4\times(-6)+2\times(-3) \\ 3\times4+6\times1 & 3\times2+6\times5 & 3\times(-6)+6\times(-3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 27 & -21 \\ -14 & 2 & 18 \\ 18 & 36 & -36 \end{pmatrix}$$

［례］ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times2+1\times3 \\ 5\times2+6\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 28 \end{pmatrix}$

행렬의 곱하기에서도 묶음법칙과 분배법칙이 성립한다.

그러나 바꿈법칙은 성립하지 않는다.

즉 일반적으로 $AB\neq BA$

[단위행렬]

바른행렬에서 행번호와 렬번호가 같은 원소들은 다 1과 같고 그밖의 원소들은 다 0과 같을 때 그 행렬을 **단위행렬**이라고 부르고 이것을 글자 I로 표시한다.

［례］ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

바른행렬 A에 대하여 늘

$$AI=IA=A$$

［례］ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

※ 바른행렬의 곱하기에서 령행렬과 단위행렬은 수들의 곱하기에서 0과 1이 노는 역할과 같은 역할을 논다.

그러나 수에서와는 달리 행렬에서는 령행렬이 아닌 두 행렬의 적이 령행렬로 될수 있다는것을 주의하여야 한다.

［례］ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 행렬식

[행렬에 의한 련립방정식의 표현]

x, y에 관한 련립1차방정식

$$\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases} \qquad (1)$$

를 다음의 방정식과 비교하여보자.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (2)$$

이 방정식의 왼변에서 두 행렬을 곱하면

$$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

같은행렬의 정의로부터 이 같기식은

$$\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$$

와 동등하다.

이와 같이 련립1차방정식 (1)은 행렬에 의하여 (2)와 같이 표현할수 있다.

(2)에서 왼변의 곁수는 주어진 방정식의 곁수들을 원소로 하는 행렬(곁수행렬)이고 오른변은 주어진 방정식의 상수마디들을 원소로 하는 행렬로 된다.

[례] $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x+5z=0 \\ x-y+z=2 \\ y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

[거꿀행렬]

같은 차수의 두 바른행렬 A, B에 대하여 AB=BA=I (단위행렬)일 때 **B를 A의 거꿀행렬**이라고 부른다.

행렬 A의 거꿀행렬을 A^{-1}과 같이 표시한다.

즉 $AA^{-1}=A^{-1}A=1$

행렬

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

는 $ad-bc\neq 0$일 때에만 거꿀행렬을 가지며

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

이다.

[례] $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여서는 $3\times 4-(-1)\times 2=14\neq 0$ 이므로 거꿀행렬이 있다.

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

거꿀행렬을 써서 련립방정식을 풀수 있다.

련립방정식

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

을 행렬로 표시하면

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

여기서 $2\times2-3\times1=1\neq0$ 이므로 결수행렬의 거꿀행렬이 있다. 거꿀행렬 $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$를 두 변에 곱하면

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

따라서 주어진 방정식의 풀이는 $x=3$, $y=2$

련립방정식

$$\begin{cases}ax+by=p\\ cx+dy=q\end{cases}\qquad(1)$$

를 더덜기법으로 풀면 풀이는

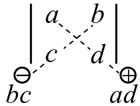
$$x=\frac{pd-bq}{ad-bc},\quad y=\frac{aq-pc}{ad-bc}\qquad(2)$$

이 풀이를 보면 분모가 다 $ad-bc$로 되여있으며 식 $ad-bc$가 련립두변수1차방정식에서 중요한 역할을 논다는것을 알수 있다.

[2차행렬식]

식 $ad-bc$를 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$의 **행렬식(2차행렬식)**이라고 부르고 이것을 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$와 같이 표시한다.

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$



[례] $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\times4-3\times5=-7$

$$\begin{vmatrix}2 & 6\\ -1 & -5\end{vmatrix}=2\times(-5)-6\times(-1)=-4$$

련립방정식 (1)의 풀이 (2)를 행렬식으로 표시하자.

$$pd-bq=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix},\quad aq-pc=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

이므로 (2)는 다음과 같이 된다.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad (*)$$

［례］ 련립방정식

$$\begin{cases} 7x+2y=4 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$$

을 공식 (*)에 의하여 풀면

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12-4}{21-10}=\frac{8}{11}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-6}{11}$$

즉 풀이는 $x=\frac{8}{11}$, $y=-\frac{6}{11}$

[3차행렬식]

련립세변수1차방정식

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

을 더덜기법으로 풀면 x, y, z의 분모는 다 같이

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}- \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (*)'$$

식 $(*)'$ 를 행렬

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

의 **행렬식(3차행렬식)**이라고 부르고 이것을

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

와 같이 표시한다.

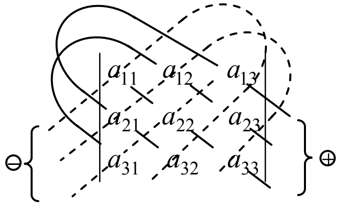
즉

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

행렬식의 펼친식 $(*)'$ 에서 매개 마디의 특징을 보면 마디에서 글자부분은 행렬식의 매 행, 매 렬에서 한개씩 잡은 원소들의 적이다. 같은 행이나 같은 렬의 원소들을 하나씩밖에 포함하지 않는다.

마디에서 부호는 마디의 인수들을 행의 번호순서로 바꾸어서 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ 의 모양으로 나타냈을 때 $i \to j \to k$ 의 순서가 1→2→3→1로 돌아가는 순서인가 거꾸로 3→2→1→3으로 돌아가는 순서인가에 따라 + 또는 − 이다.

3차행렬식의 계산규칙을 도식으로 표시하면 다음과 같다.



2차, 3차행렬식의 정의로부터 4차, 5차, … , n차행렬식을 정의할수 있다.

[행렬식의 성질]

2차행렬식

$$\mathrm{A}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

의 성질을 보자.

① 행렬식을 전위하여도 그 값은 변하지 않는다. 행렬식을 전위한다는것은 매개 행을 대응하는 렬로 바꾼 행렬이다. 그러면 행에 대하여 성립하는 성질이 렬에 대해서도 성립한다.

② 행렬식의 두 행을 바꾸면 행렬식의 값은 반대수로 된다.

례를 들어 A의 1행과 2행을 바꾸면

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=bc-ad=-(ad-bc)=-\mathrm{A}$$

③ 행렬식의 한 행의 원소들을 다 k배 하면 행렬식의 값도 k배로 된다.

례를 들어 A의 1행의 원소들을 k배 하면

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}=kad-kbc=k(ad-bc)=k\mathrm{A}$$

④ 행렬식의 한 행의 원소들을 다 k배 하여 다른 한 행의 대응하는 원소들에 더하면 행렬식의 값은 달라지지 않는다.

례를 들어 A의 2행의 원소들을 k배 하여 1행의 대응하는 원소들에 더하면

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}=(a+kc)d-(b+kd)c=ad-bc=\mathrm{A}$$

⑤ 행렬식의 한 행의 원소들이 다른 한 행의 대응하는 원소들에 비례하면 행렬식의 값은 0이다.

례를 들어 A의 2행의 원소들이 1행의 대응하는 원소들의 k배이면

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = akb - bka = 0$$

⑥ 행렬식의 행과 렬을 같은 번호끼리 다 바꾸면 행렬식의 값은 달라지지 않는다.

⑦ 두 행렬식에서 같은 번호의 한 행(또는 렬)이 같으면 그 합은 하나의 행렬식으로 쓸수 있다.

례를 들어 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = (ad - bc) + (af - be)$

$$= a(d+f) - b(c+e) = \begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix}$$

⑧ 행렬식에서 어느 한 행의 모든 원소에 령 아닌 수를 곱하거나 다른 행의 대응하는 원소들에 더하여도 그 값은 변하지 않는다.

례를 들어 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$일 때 1행에 2배를 하고 2행에 더해보면

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{vmatrix}$$

이다.

성질 ⑦로부터

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

성질 ⑧은 모든 행렬식을 0이 많이 들어있는 식으로(간단한 모양으로) 만들수 있다는것을 암시해준다.

상식

치명적약점이 있었던 수학자

라쁠라스(1749-1827, 프랑스)

그의 별명은 《프랑스의 뉴톤》이다. 극빈한 가정에서 태여난 그는 힘겹게 공부를 하지 않으면 안되였다.

그는 10대에 벌써 당시 수학자들의 수준에 올라설수 있었다.

그는 행렬식의 전개정리, 확률론과 수리통계학에서 최소두제곱법과 오차론을 제기하였다.

그는 학생시절에 똑똑하고 눈썰미가 있고 쾌활하였기때문에 사람들로부터 호감을 샀다. 그는 농촌학교를 다닐 때 공부를 잘하여 학생으로부터 보조교원으로 제발되였다고 한다.

라쁠라스의 치명적약점은 출세욕에 눈이 어두워 정권이 바뀔 때마다 정치적견해를 바꾼것이다.

마지막시기에 가서야 오일레르의 모범을 따라 젊은 수학자들의 발전에 관심을 돌렸다고 한다. 그는 당시 과학의 상상봉에 올라선 학자였지만 언제나 만족을 몰랐다고 한다.

3. 련립세변수1차방정식의 풀이공식

련립세변수1차방정식

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=r \end{cases}$$

에서 결수행렬식이

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2 \neq 0$$

이라고 하자. 이때 결수행렬식의 첫째 렬, 둘째 렬, 셋째 렬

을 련립방정식의 상수렬로 바꾼것을 각각 D_x, D_y, D_z 로 표시하자. 그러면

$$D_x=\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix},\ D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}$$

따라서 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

로 표시된다. 여기서 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$ 이라는것을 다시 강조해준다.

이렇게 x, y, z 를 구하는 풀이공식을 **크라메르공식**이라고 부른다.

［례］ 다음 련립방정식을 행렬식을 리용하여 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+2y+2z=15 \end{cases}$$

풀이. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9\neq 0$ 이므로 풀이를 가진다.

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 15 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9,\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix}=18,\ D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 15 \end{vmatrix}=27$$

따라서 $x=\dfrac{D_x}{D}=1$, $y=\dfrac{D_y}{D}=2$, $z=\dfrac{D_z}{D}=3$

풀이모임 $\{(1,\ 2,\ 3)\}$

［례］ 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=m \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

풀이. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(m+1)(m-1)$

$m=\pm1$ 이면 $D=0$ 이므로 풀이를 가지지 않는다.
주어진 련립방정식이 풀이를 가지기 위해서는
$m\neq\pm1$ 이여야 한다.

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4(m+1)(m-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-(m-3)(m-1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4(m-1)$$

따라서 $m\neq\pm1$ 일 때

$$x=4,\quad y=\frac{m-3}{m+1},\quad z=-\frac{4}{m+1}$$

풀이모임 $\left\{\left(4,\ \frac{m-3}{m+1},\ -\frac{4}{m+1}\right)\right\}$

제13장. 도 함 수

1. 극 한

[수렬의 극한]

수렬 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_n, ⋯에서 마디의 번호 n이 끝없이 커질 때 a_n이 일정한 수 a로 얼마든지 가까와가면 수렬 (a_n)은 수 a로 **수렴한다**고 말하고 이것을 기호로 다음과 같이 표시한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{또는} \quad a_n \to a(n\to\infty)$$

그리고 수 a를 수렬 (a_n)의 **극한**이라고 부른다.

［례］ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$a_n=\frac{n+1}{n}$일 때 $a_n=1+\frac{1}{n}$이므로

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots$$

은 n이 끝없이 커질 때 얼마든지 1에 가까와간다.

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

수렬이 극한을 가지지 않으면 수렬은 **발산한다**고 말한다.

발산하는 수렬은 두가지로 구분한다.

① $n\to\infty$일 때 a_n의 절대값이 끝없이 커지는 경우

② 유한극한도 없고 무한극한도 없는 경우

［례］ 수렬 (n^3)과 $[(-1)^{n-1}]$은 발산한다.

$a_n=n^3$은 n이 끝없이 커질 때 마디의 값이 얼마든지 커지면 수렬은 **무한대로 발산한다**고 말한다.

또한 $a_n=(-1)^{n-1}$에서와 같이 n가 끝없이 커질 때 1과 −1을 교대로 잡으면서 일정한 수로 가까와가지 않으면 수렬은 **발산(진동)한다**고 말한다.

— **수렴의 극한의 성질**

(a_n), (b_n) 이 수렴하면

① $\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\lim_{n\to\infty}a_n$ (c 는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$ ($\lim_{n\to\infty}b_n \neq 0$)

[함수의 극한]

함수 $y=f(x)$ 에서 독립변수 x 가 늘 $x\neq a$ 이면서 아무런 방법으로나 수 a 에 끝없이 가까와갈 때 함수 $f(x)$ 의 값이 일정한 수 A 로 얼마든지 가까와가면 함수 $f(x)$ 는 x 가 a 로 가까와갈 때 수 A 로 **수렴한다**고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=\mathrm{A} \quad \text{또는} \quad f(x)\to \mathrm{A}(x\to a)$$

그리고 수 A 를 점 a 에서의 함수 $f(x)$ 의 **극한** 또는 **극한값**이라고 부른다.

[례] 함수 $f(x)=2x-1$ 에서 변수 x 가 2에 끝없이 가까와갈 때 함수값의 변화를 살펴보자.

변수 x 가 2보다 작은 값을 잡으면서 2에 가까와갈 때, 례를 들어 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, … →2일 때 함수 $f(x)$ 의 값은 2.8, 2.98, 2.998, 2.9998, … →3

이번에는 x 가 2보다 큰 값을 잡으면서 2에 가까와 갈 때, 례를 들어 2.1, 2.01, 2.001, … →2일 때 함수 $f(x)$ 의 값은 3.2, 3.02, 3.002, … →3

독립변수 x 가 아무런 방법으로나 2에 끝없이 가까와갈 때 함수 $f(x)$ 의 값은 얼마든지 3에 가까와간다는것을 볼수 있다. 즉 $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$

※ $\lim_{x\to a}f(x)=\mathrm{A}$ 라고 할 때 $x=a$ 에서의 함수값 $f(a)$ 가 늘 A와 같은것은 아니다. $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 뜻을 안 가지는 경우도 있고 뜻을 가지는 경우에도 $f(a)\neq \mathrm{A}$ 인 경우가 있다.

［례］ 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 은 독립변수 x 가 늘 $x\neq 1$ 이면서 1에 끝없이 가까와갈 때 $x-1\neq 0$ 이므로

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

따라서 독립변수 x 가 아무런 방법으로나 1에 끝없이 가까와갈 때 함수 $f(x)$ 의 값은 2에 얼마든지 가까와간다는것을 볼수 있다. 즉

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

함수 $f(x)$ 가 $x\to a$ 일 때 극한을 가지지 않으면 함수 $f(x)$ 는 $x\to a$ 일 때 발산한다고 말한다.

［례］ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 은 $x\to 0$ 일 때 그 절대값이 얼마든지 커진다. 따라서 발산한다. 이것을 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ 로 표시하고 $x\to 0$ 일 때 $\dfrac{1}{x}$ 은 무한대로 간다고 말한다.

— **함수의 극한의 성질**

$x\to a$ 일 때 $f(x)$, $g(x)$ 가 수렴하면

① $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\lim_{x\to a}f(x)$ （c 는 상수）

② $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$

③ $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

④ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ ($\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$)

※ 극한을 구하는데서 다음의 방법이 많이 쓰인다. 즉 $x \to a$ 일 때 모든 x 에 대하여 $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ 이고 $\lim_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\psi(x) = \mathrm{A}$ 이면 $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ 로 된다.

[례] $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$ 에서 $x \to 0$ 일 때 $\sin\frac{1}{x}$ 이 수렴하지 않으므로 극한의 성질을 그대로 쓸수 없다. 이때에는 다음과 같이 극한을 구한다.

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad (x \neq 0)$$

이므로 $x > 0$ 일 때 $-x \le x\cdot\sin\frac{1}{x} \le x$

$x < 0$ 일 때 $-x \ge x\cdot\sin\frac{1}{x} \ge x$

그런데 $\lim_{x\to 0}(-x) = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$ 이므로 가운데식 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 도 $x \to 0$ 일 때 0으로 수렴한다. 이리하여

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

[$x \to \pm\infty$ 일 때 함수의 극한]

아무리 큰 정수 M을 주어도 변수 x 의 절대값이 M보다 커지면 즉

$$|x| > \mathrm{M}$$

이면 변수 x 는 무한대로 간다고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$x \to \infty$$

특히 $x > \mathrm{M}$ 이면 변수 x 는 정의 무한대로 간다고 말하고

$$x \to +\infty$$

와 같이 표시한다.

또한 $x<-\mathrm{M}$ 이면 변수 x 는 부의 무한대로 간다고 말하고

$$x\to-\infty$$

와 같이 표시한다.

함수 $y=f(x)$ 에서 $|x|$ 가 끝없이 커질 때 함수값 $f(x)$ 가 일정한 수 A 로 얼마든지 가까와가면 함수 $f(x)$ 는 $x\to\infty$ 일 때 수 A 로 수렴한다고 말하고 다음과 같이 표시한다.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\mathrm{A} \quad \text{또는} \quad f(x)\to\mathrm{A}\ (x\to\infty)$$

$x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 일 때의 함수의 극한도 우에서와 꼭 같이 정의한다.

[몇가지 특수한 극한들]

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

[함수의 극한계산]

○ $f(x)$ 가 초등함수이고 $x\to a$ 일 때 $x=a$ (극한점)가 $f(x)$ 의 뜻구역에 속하는 경우에는 $x=a$ 를 갈아넣으면 된다.

[례] 함수 $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$ 는 초등함수이고 극한점 $x=1$ (뜻구역에 속한다.)에서 뜻을 가지므로

$$\lim_{x\to1}(x^3-5x^2+3x+4)=f(1)=1^3-5\cdot1^2+3\cdot1+4=3$$

○ $x\to\infty$ (혹은 $\pm\infty$) 또는 x 가 함수의 뜻구역에 속하지 않는 어떤 수에로 수렴하는 경우에는 극한점의 값을 갈아넣는 방법으로 극한을 계산할수 없으며 매 경우에 함수의 극한은 특수한 방법으로 계산된다.

례를 들어 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 를 들수 있다.

특수한 방법으로 얻어지는 극한들가운데서 자주 만나게 되는 극한들은 다음과 같다.

① $\lim\limits_{x\to\infty} a\cdot x=\infty$ ② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{a}=\infty$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty$ ④ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}0 & (0<a<1)\\ +\infty & (a>1)\end{cases}$

⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\begin{cases}0 & (a>1)\\ +\infty & (0<a<1)\end{cases}$

⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=\begin{cases}+\infty & (a>1)\\ -\infty & (0<a<1)\end{cases}$

⑧ $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x=\begin{cases}-\infty & (a>1)\\ +\infty & (0<a<1)\end{cases}$

○ 극한점에서 부정형이 되는 경우

부정형. 극한계산에서 특히 극한점의 값을 갈아넣을 때 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$와 같은 형태가 나오는 경우가 있다. 이것들은 아직 확정되지 않아 부정으로 된다는 의미에서 **부정형**이라고 부른다.

부정형에는 다음의 7가지가 있다.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

※ $\infty+\infty=\infty$, $\frac{0}{\infty}=0\cdot\frac{1}{\infty}=0\cdot 0=0$, $\frac{\infty}{0}=\infty\cdot\frac{1}{0}=\infty\cdot\infty=\infty$로 리해하기로 한다.

· $x\to a$, $x\to\infty$일 때 $f(x)$가 $\frac{0}{0}$ 형태로 되는 경우

[례] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x+3}=\frac{3}{4}$

여기서 $x-1$ 로 분자, 분모를 나누고 약분한 다음 $x=1$ 을 갈아넣어 극한을 계산하였다.

※ 일반적으로 극한점 $x=a$ 에서 0으로 되는 여러마디식들을 분자, 분모로 하는 분수식은 나머지정리에 의하여 나누어 떨어진다.

이때 $x\to a$ 는 $x=a$ 가 아니므로 즉 $x-a\neq 0$ 이므로 항상 $x-a$ 로 약분할수 있다. 따라서 부정형으로 되게 하는 원인이였던 $x-a$ 가 없어짐으로써 극한이행할수 있는 기초가 이루어지며 다음 $x=a$ 를 갈아넣으면 쉽게 극한이 계산된다.

［례］ $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}$$

［례］ $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

극한점에서 $\frac{0}{0}$ 형태이므로 분모에서 뿌리기호를 없애고 계산하였다.

무리함수가 들어있는 분수식에서는 분자 또는 분모를 유리화하여 계산하는것이 편리하다.

· $x\to a$, $x\to\infty$ 일 때 $f(x)$ 가 $\frac{\infty}{\infty}$ 형태로 되는 경우

먼저 극한점에서 $\frac{\infty}{\infty}$ 임을 확인하고 함수를 변형시킨다.

［례］ $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$$

※ 분자, 분모를 x 의 최고차마디 x^2 으로 나누고 $\frac{1}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ 는 $x\to\infty$ 일 때 0으로 수렴한다는것을 고려하여야 한다.

2. 함수의 련속

[함수의 증분]

함수 $y=f(x)$가 점 a와 이 점에 가까운 모든 점들에서 뜻을 가진다고 하자.

이제 독립변수 x가 점 a와 다른 점 x_1을 잡자. 이때 차 x_1-a를 점 a에서 독립변수 **x의 증분**이라고 부르고 Δx로 표시한다. 즉

$$\Delta x=x_1-a \quad (\Delta x\neq 0)$$

이때 $x_1=a+\Delta x$

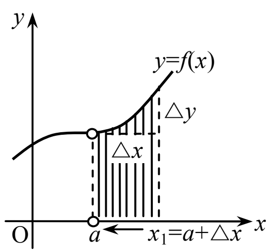
점 a에서 독립변수의 증분 Δx에 대응하는 함수 $f(x)$의 값의 변화 $f(a+\Delta x)-f(a)$를 점 a에서 **함수의 증분**이라고 부르고 Δy로 표시한다. 즉

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$$

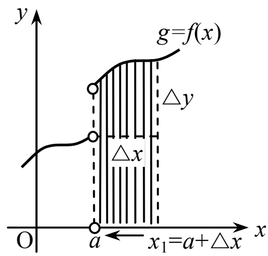
[함수의 련속성]

함수 $y=f(x)$가 점 $x=a$ 가까이에서 뜻을 가지며 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(a+\Delta x)-f(a)\right]=0$ 일 때 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서 **련속**이라고 부른다.

이것은 점 a에서 독립변수 x가 조금 변하면 그에 따라 함수값 $f(x)$도 조금 변한다는것을 보여준다.



련속



불련속

$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$에서 $a+\Delta x=x$라고 놓으면

$$\Delta x\to 0 \Leftrightarrow x\to a$$

따라서 $f(x)$가 점 a에서 련속이면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0$$

이로부터 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

이리하여 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 일 때 $f(x)$ 는 점 a 에서 련속이라고 말한다.

［례］ 함수 $f(x)=x^2$ 은 점 $x=2$ 에서 련속이다.

사실 $x=2$ 에서 증분 Δx 를 주면

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

이므로 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right]=0$

즉 $f(x)=x^2$ 은 점 $x=2$ 에서 련속이다.

함수 $f(x)$ 가 주어진 구간의 매개 점에서 련속이면 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 **련속**이라고 말한다.

［례］ 함수 $f(x)=x^2+3x$ 는 $(-\infty,\ +\infty)$에서 련속이다.

사실 아무런 점 $x\in(-\infty,\ +\infty)$를 잡아도

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)\right]-(x^2+3x)=$$

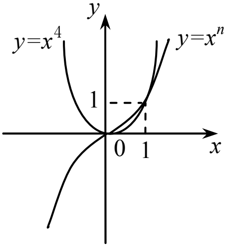
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2+3\cdot\Delta x=(2x+3)\Delta x+(\Delta x)^2$$

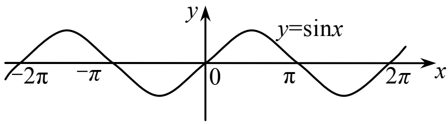
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(2x+3)\Delta x+(\Delta x)^2\right]=0$$

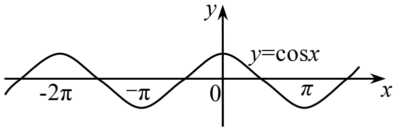
즉 $f(x)=x^2+3x$ 는 $(-\infty,\ +\infty)$의 임의의 점에서 련속이므로 $(-\infty\ ,\ +\infty)$에서 련속이다.

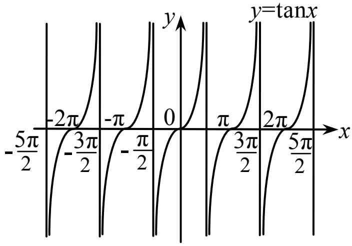
[몇가지 련속함수의 그라프]

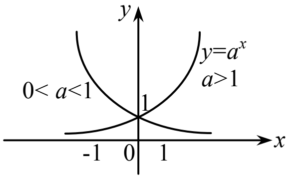
우리가 늘 다루고있는 함수들인 $y=x^n$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$ 등은 다 그것이 뜻을 가지는 구간에서 련속이다. 이것들의 그라프를 보면 직관적으로 그것이 련속이라는것을 곧 알수 있다.

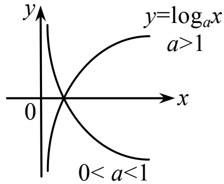










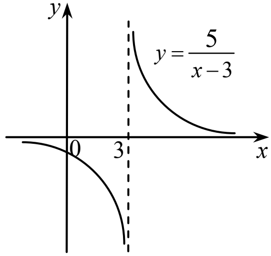


※ 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 점 $x=a$ 에서 련속이면 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 합, 차, 적, 상도 점 $x=a$ 에서 련속이다.

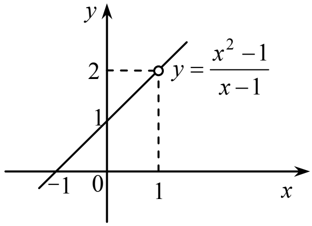
[불련속함수]

함수 $f(x)$ 가 점 $x=a$ 에서 련속이 아닐 때 함수 $f(x)$ 는 점 a 에서 **불련속**이라고 부른다.

[례] 함수 $f(x)=\dfrac{5}{x-3}$ 은 점 $x=3$ 에서 불련속이다. 사실 그림에서 보는것처럼 이 함수의 그라프는 점 $x=3$ 에서 끊어져있다. 이 함수는 점 $x=3$ 에서 뜻을 가지지 않을뿐아니라 $x\to 3$ 일 때 극한도 가지지 않는다.



［례］ 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x-1}$ 은 점 $x=1$에서 불련속이다. 사실 그림에서 보는것처럼 이 함수의 그라프는 점 $x=1$ 에서 틈이 생겨 끊어져있다.

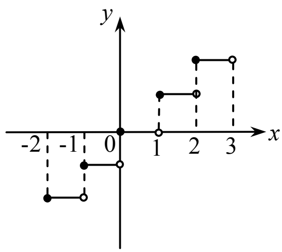


$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

이 함수는 $x=1$에서 뜻을 가지지 않지만 $x\to1$ 일 때 극한은 가진다.

［례］ 함수 $y=[x]$는 점 $x=0$, ±1, ±2, $\cdots$ 에서 불련속이다.

사실 수 x에 그 옹근수부를 대응시키는 함수 $y=[x]$ 의 그라프는 점 $x=0$, ±1, ±2, $\cdots$에서 그 높이가 1만큼씩 뛴다.



3. 도함수

[미분결수]

함수 $y=f(x)$ 가 주어졌다고 하자. 점 a에서 독립변수의 증분 Δx를 잡고 이에 대응하는 함수의 증분을 Δy라고 하면

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이때 비 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 는 Δx 에 따라 달라진다. 이것을 a와 $a+\Delta x$ 사이에서의 함수 $y=f(x)$ 의 **평균변화률**이라고 부른다.

만일 극한

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이 있으면 함수 $y=f(x)$는 점 a에서 **미분가능하다**고 말한다. 이때 이 극한은 점 a에서의 함수의 변화속도 즉 변화률을 나타낸다.

점 a에서의 함수 $f(x)$의 변화률을 $f'(a)$로 표시하고 이것을 **미분결수**라고 부른다. 즉

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

[례] 함수 $y=3x^2+5$의 점 $x=2$에서 독립변수의 증분을 Δx라고 하면

$$\Delta y = f(2+\Delta x)-f(2)=[3(2+\Delta x)^2+5]-(3\cdot 2^2+5)$$
$$=12\cdot\Delta x+3\cdot(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12\cdot\Delta x+3\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x}=12+3\cdot\Delta x$$

따라서 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(12+3\cdot\Delta x)=12$

즉 함수 $y=3x^2+5$는 점 $x=2$에서 미분가능하고 미분결수는 $f'(2)=12$이다.

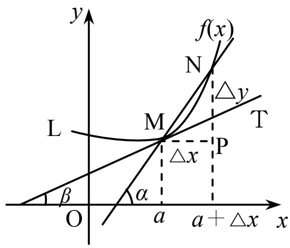
[미분결수의 기하학적의미]

그림에서 보는바와 같이

$MP=\Delta x$

$NP=\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$

$$\frac{NP}{MP}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\tan\alpha$$



즉 평균변화률은 가름선 MN의 방향결수를 나타낸다.

이제 $\Delta x \to 0$이면 점 N은 함수 $f(x)$의 그라프에 따라 점 M에 끝없이 가까와가고 가름선 MN은 그 방향을 점차

로 바꾸면서 직선 MT에 얼마든지 다가간다. 이 극한위치에 있는 직선 MT를 점 M에서 곡선 L에 그은 **접선**이라고 부르고 점 M을 **접점**이라고 부른다.

가름선 MN이 접선 MT로 다가갈 때 $\alpha \to \beta$이다. 따라서 함수 $f(x)$가 점 a에서 미분가능하면

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\alpha\to\beta}\tan\alpha=\tan\beta$$

그런데 $\tan\beta$는 접선 MT의 방향결수이다.

이리하여 미분결수 $f'(a)$는 점 $\mathrm{M}(a,\ f(a))$에서 $f(x)$의 그라프에 그은 접선의 방향결수와 같다.

[미분결수의 력학적의미]

어떤 물체가 직선운동을 한다고 하자. 이때 질점의 운동법칙은 질점이 운동한 거리 S의 시간 t에 관한 함수 $\mathrm{S}=f(t)$로 표시된다.

어떤 순간 t_0으로부터 Δt 시간동안에 물체가 이동한 거리를 $\Delta\mathrm{S}$라고 하면

$$\Delta\mathrm{S}=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$

이다. 물체가 등속운동을 하면 비

$\dfrac{\Delta\mathrm{S}}{\Delta t}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$은 물체가 운동한 속도이다. 그러나 물체가 부등속운동을 하는 경우에 이것은 Δt 시간동안의 물체의 평균속도와 같다. 즉 함수의 평균변화률은 력학적으로 직선운동을 하는 물체의 평균속도를 나타낸다. 이것은 Δt를 어떻게 잡는가에 따라서 그 값이 달라진다. Δt를 충분히 작게 잡으면 평균속도는 시간 t_0에서의 순간적인 속도에 가까와진다.

즉 $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mathrm{S}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=f'(t_0)$

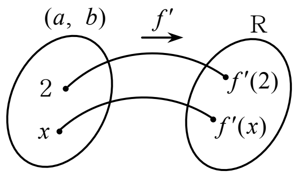
이리하여 미분결수 $f'(t_0)$은 력학적으로 직선운동을 하는 물체의 순간 t_0에서의 순간속도를 의미한다.

［례］ 어떤 물체가 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 의 법칙으로 자유락하를 시작하여 $t=5$ 초인 순간에 이 물체의 속도 v 는 (여기서 $g=9.8\text{m/s}^2$)

$$v=S'(t)=gt$$

$$v(5)=9.8\times5=49(m/s)$$

[도함수]



함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 의 매개 점에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 구간 (a, b) 에서 미분가능하다고 말한다.

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능하다고 하자.

이때 매개 점 $x\in(a, b)$ 에 그 미분결수 $f'(x)$ 를 대응시키면 (a, b) 를 뜻구역으로 하는 하나의 새로운 함수가 정해진다. 이 함수를 $f'(x)$ 로 표시하고 함수 $f(x)$ 의 **도함수**라고 부른다. 즉

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad x\in(a,b)$$

함수 $y=f(x)$ 의 도함수를

$$y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx}$$

등으로 표시한다.

※ 함수 $f(x)$ 가 (a, b) 에서 미분가능하면 (a, b) 의 매개 점 x 에는 $f(x)$ 의 미분결수가 꼭 하나씩 대응한다는것은 극한의 성질로부터 나오는것이다.

이와 같이 도함수를 받아들이면 점 $x=x_0$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 미분결수(변화률)는 점 $x=x_0$ 에서의 도함수값 $f'(x_0)$ 이다. 그러므로 구간 (a, b) 에서 미분가능한 함수의 도함수 $f'(x)$ 를 구한다는것은 구간 (a, b) 의 임의의 점 x 에서의 미분결수(변화률)를 구하는것이다.

［례］ 함수 $y=x^2$ 은

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$$
$$=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

이며 따라서 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

이고 도함수는

$$y'=(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x$$

이때 점 $x=-1$, $x=3$ 에서의 도함수값(미분결수)을 구하면

$$f'(-1)=2\cdot(-1)=-2$$
$$f'(3)=2\cdot 3=6$$

[함수의 미분가능성과 련속성사이의 관계]

함수 $y=f(x)$ 가 점 a 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 점 a 에서 련속이다.

※ 이 명제의 거꿀은 성립하지 않는다. 즉 함수가 련속인 점에서 반드시 미분가능한것은 아니다.

례로 함수 $f(x)=|x|$ 은 $x=0$ 에서 련속이지만 미분불가능하다.

사실

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

이므로 $x=0$ 에서의 변수의 증분 Δx 에 대하여

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|=\begin{cases} \Delta x, & \Delta x>0 \\ -\Delta x, & \Delta x<0 \end{cases}$$

이고 따라서

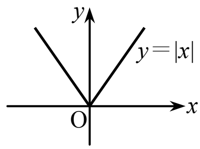
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases} 1, & \Delta x>0 \\ -1, & \Delta x<0 \end{cases}$$

이므로

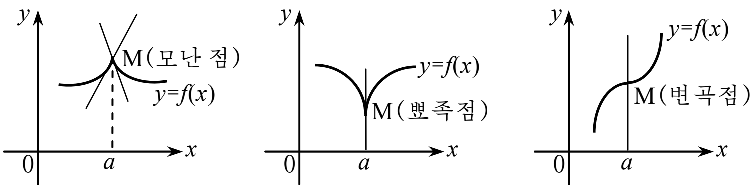
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$$

이다. 그러므로 $\Delta x \to 0$ 일 때 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 는 일정한 극한을 가지지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x|$ 는 점 $x=0$ 에서 미분불가능하다.



그림에서 함수 $f(x)$ 는 점 $x=a$ 에서 련속이지만 미분불가능하다.



[미분법의 기본규칙]

도함수를 구하는것을 미분한다고 말하고 도함수를 구하는 산법을 **미분법**이라고 부른다.

① $c'=0$ (c는 상수)

② $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

③ $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

④ $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

⑤ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(g(x) \neq 0\right)$

규칙 ③, ④는 일반적으로 3개이상의 함수들인 경우에도 그대로 성립한다.

$$\left[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\right]' = f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_n'(x)$$

$$\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)\right]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) +$$
$$+ f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) + \cdots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n'(x)$$

[초등함수의 도함수]

초등함수의 도함수는 우에서 본 미분법의 기본규칙과 함께 기본초등함수들의 도함수를 구하는 다음 공식들에 의하여 구하면 된다.

함 수	도함수	함 수	도함수
c	0	$\cos x$	$-\sin x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\tan x$	$\sec^2 x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

[례] ① $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

$y' = 3x^2 + 4x + 5$

② $y = (2x+1)(3-x^2)$

$y' = (2x+1)'(3-x^2) + (2x+1)(3-x^2)'$

$= 2(3-x^2) + (2x+1)(-2x) = 6 - 2x - 6x^2$

③ $y = \frac{x-1}{x+1}$

$y' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

④ $y = x + \sin x - \cos x$

$y' = 1 + \cos x + \sin x$

4. 복잡한 함수의 도함수

[합성함수의 도함수]

y 가 u 의 함수 $y=f(u)$ 이고 u 가 또한 x 의 함수 $u=g(x)$ 이면 y 는 x 의 어떤 함수로 된다. 이 함수를 $y=f(g)$ 로 표시하고 함수 f 와 g 의 **합성함수**라고 부른다. 즉

$$y=f(g)(x)=f[g(x)]$$

함수 $y=f(u)$ 가 점 u 에서, $u=g(x)$ 는 점 x 에서 미분가능하면 합성함수 $y=f[g(x)]$ 는 점 x 에서 미분가능하며

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad (y'=f'(u)\cdot g'(x))$$

즉 $y'=[f(g)]'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

※ $[f(g)]'(x)$ 는 합성함수 $f(g)$ 의 도함수 $f(g)'$ 의 점 x 에서의 값이고 $f'[g(x)]$ 는 f 의 도함수 f' 의 $g(x)$ 에서의 값이다.

［례］ ① $y=(2x-1)^3$ 은 두 함수 $y=u^3$, $u=2x-1$ 로 이루어진 합성함수이므로

$$y'=(u^3)'(2x-1)'=3u^2\cdot 2=6(2x-1)^2$$

② $y=\sin x^2$ 은 $y=\sin u$, $u=x^2$ 으로 이루어진 합성함수이므로

$$y'=(\sin u)'\cdot(x^2)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2$$

[거꿀함수의 도함수]

$x=f^{-1}(y)$ 를 $y=f(x)$ 의 거꿀함수라고 할 때 $f'(x)\neq 0$ 이고 $x=f^{-1}(y)$ 가 련속이면 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

다시말하여 거꿀함수의 도함수는 본래함수의 도함수의 거꿀수와 같다.

［례］ $y=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$의 거꿀함수는 $x=\sin y$ 이므로

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

즉 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

[보조변수로 표시된 함수의 도함수]

함수 $y=f(x)$가 t를 보조변수로 하는 보조변수함수로 주어졌다면 즉

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\quad t\in[\alpha,\ \beta]$$

이면 x에 관한 y의 도함수는

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

［례］ 원둘레 $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases},\quad t\in[0,\ 2\pi]$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(r\sin t)'}{(r\cos t)'}=\frac{r\cos t}{-r\sin t}=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\cot t$$

이것은 원둘레우에 놓인 점에서 그 원둘레에 그은 접선의 방향곁수이다.

그런데 그 점에서 그은 반경의 방향곁수는 $\tan t$ 이므로

$$(-\cot t)\cdot\tan t=-1$$

다시말하여 접선은 반경에 수직임을 알수 있다.

[로그미분법]

$f(x)=x^{\sin x}\ (x>0)$ 의 도함수를 구한다고 하자.

두 변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\cdot\ln x$$

여기서 $\ln f(x)$ 는 합성함수이므로

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=f(x)\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

이와 같이 두 변에 로그를 취하고 미분하는 방법을 **로그미분법**이라고 부른다.

[고계도함수]

함수 $y=f(x)$ 의 도함수의 도함수 $(f'(x))'$ 즉

$$(f'(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $f(x)$ 의 **2계도함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

마찬가지방법으로 3계, 4계도함수들을 정의할수 있으며 일반적으로 $n-1$ 계도함수의 도함수를 n **계도함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

2계도함수이상의 도함수를 **고계도함수**라고 부르며 이와 구별하여 $f'(x)$ 를 **1계도함수**라고 부른다.

［례］ $f(x)=x^4$ 의 5계도함수를 구하여보면

$f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$

$f^4(x)=24$, $f^5(x)=0$

［례］ $y=\sin x$ 의 n 계도함수를 구하여보면

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

일반적으로 $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

[2계도함수의 력학적의미]

도함수(미분결수)는 력학적으로 직선운동을 하는 물체의 순간속도를 의미하였다. 즉 어떤 물체가 운동법칙

$$s=f(t)$$

로 직선운동을 한다고 하면 어떤 순간 t 에서의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t)=f'(t)$$

그러므로 2계도함수는 속도의 변화률

$$f''(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)$$

이며 이것은 곧 가속도를 의미한다.

즉 $a(t)=v'(t)=f''(t)$

이리하여 2계도함수(2계미분결수)는 력학적으로 직선운동을 하는 물체의 가속도를 의미한다.

［례］ 질점이 운동법칙

$$s=v_0t+\sin t$$

에 따라 직선운동을 한다. 임의의 순간 t 에서의 속도는

$$v(t)=s'=v_0+\cos t$$

이고 가속도는

$$a(t)=s''=(v_0+\cos t)'=-\sin t$$

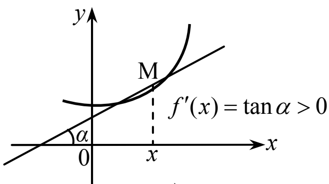
5. 도함수의 응용

[함수의 증가, 감소]

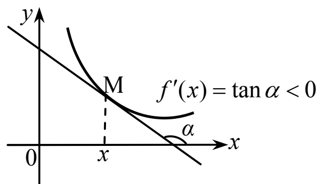
함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 련속이고 (a, b) 에서 미분가능하다고 하자.

이때 도함수 $f'(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 그라프의 점 $M(x, f(x))$ 에서 이 그라프에 그은 접선의 방향결수를 의미하므로 $f'(x)$ 의 부호에 의하여 함수가 증가하는가 감소하는가를 판정할수 있다.

· $f'(x)>0$ 인 점 x 에서 함수 $f(x)$ 의 그라프에 그은 접선은 그 방향결수가 정이므로 왼쪽에서부터 오른쪽으로 오르는 직선이다. 따라서 점 x 가까이에서 함수의 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 오른다. 즉 $f(x)$ 는 점 x 가까이에서 증가한다.(그림 ㄱ))



ㄱ)



ㄴ)

· $f'(x)<0$ 인 점 x 에서 함수 $f(x)$ 의 그라프에 그은 접선은 그 방향결수가 부이므로 왼쪽에서 오른쪽으로 내리는 직선이다. 따라서 점 x 가까이에서 함수의 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 내려간다. 즉 $f(x)$ 는 점 x 가까이에서 감소한다.(그림 ㄴ))

도함수의 부호에 의하여 함수의 증가와 감소를 다음과 같이 판정할수 있다.

① $f'(x)>0$ $(a<x<b)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ $(a<x<b)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 감소한다.

※ 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 값이 0이 되는 점 즉 $f'(x)=0$ 이 되는 점 x를 함수 $f(x)$의 **머물점(정류점)**이라고 부른다.

함수의 증가구간, 감소구간은 다음과 같이 구한다.

① 주어진 함수의 머물점들과 미분불가능한 점(도함수값이 없는 점)들을 찾는다.

② 이 점들에 의하여 $f'(x)$의 뜻구역을 몇개의 구간으로 나눈다.

③ 매 구간에서 $f(x)$의 부호들의 관계에 의하여 증가 또는 감소구간을 정한다.

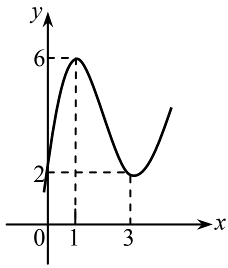
［례］ 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$의 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$이다.

이 함수의 도함수 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ 가 0이 되는 점 즉 $(x-1)(x-3)=0$ 이 되는 점 $x=1,\ x=3$은 머물점으로 된다.

함수의 뜻구역 $(-\infty, +\infty)$을 머물점들을 경계로 하여 나눈다. 즉

$(-\infty,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ +\infty)$

로 나눈다.



매 구간에서 도함수 $f'(x)$의 부호를 보면

구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f'(x)>0$

$(1,\ 3)$에서 $f'(x)<0$

$(3,\ +\infty)$에서 $f'(x)>0$

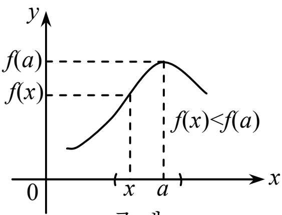
따라서 함수 $f(x)$의 증가구간은 $(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$ 이고 감소구간은 $(1,\ 3)$이다.

[함수의 극값]

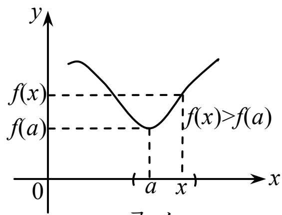
함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$가 점 a의 가까이에서 가장 큰 값이면 즉 $x=a$ 가까이의 아무런 점 x를 잡아도 늘 $f(x)<f(a)$이면 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서 **극대**로 된다고 말하고 $f(a)$를 **극대값**, $x=a$를 **극대점**이라고 부른다.

함수 $f(a)$가 점 a의 가까이에서 가장 작은 값이면 즉 $x=a$가까이의 아무런 점 x를 잡아도 늘 $f(x)>f(a)$이면 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서 **극소**로 된다고 말하고 $f(a)$를 **극소값**, $x=a$를 **극소점**이라고 부른다.

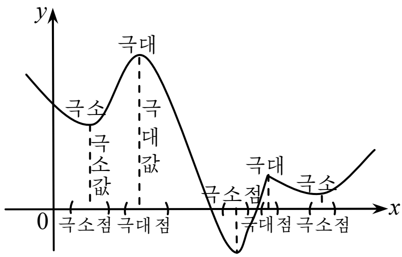
함수의 극대값과 극소값을 통털어 **극값**이라고 부르고 극대점과 극소점을 통털어 **극값점**이라고 부른다.



극 대



극 소



[1계도함수에 의한 극값점의 판정조건]

미분가능한 함수 $f(x)$가 점 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 점 $x=a$에서 $f'(a)=0$이라고 하자. 이때

① $\left.\begin{array}{l} x<a\text{에서 } f'(x)>0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)<0 \end{array}\right\}$ 이면 점 $x=a$는 $f(x)$의 극대점

② $\left.\begin{array}{l} x<a\text{에서 } f'(x)<0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)>0 \end{array}\right\}$ 이면 점 $x=a$는 $f(x)$의 극소점

※ 함수 $f(x)$ 가 미분불가능한 점에서도 극값을 가질수 있다. 이 경우에도 우에서와 마찬가지로 미분불가능한 점의 왼쪽과 오른쪽 가까이에서 도함수 $f'(x)$ 의 부호변화를 살펴 극대, 극소를 판정한다.

— 극값을 구하는 규칙

① 머물점과 미분불가능한 점들을 구한다.

② 이 점들을 크기순서로 놓고 구간을 나눈다.

③ 매 점들의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 도함수 $f'(x)$ 의 부호변화를 살펴 극값점을 판정한다.

④ 극값점들을 함수에 갈아넣어 극값을 얻는다.

x	$-\infty\cdots$	a	$\cdots+\infty$	점 a 에 대한 판정
$f'(x)$	$+$	0	$-$	극대점
	$-$	0	$+$	극소점
	$\pm$	0	$\pm$	극값점이 아니다.

[례] 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ 의 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$ 이다. 도함수를 구하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)$$

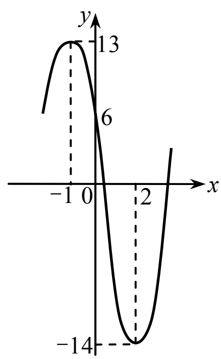
머물점은 $x_1=-1,\quad x_2=2$

머물점 $x_1=-1$ 의 가까이에서

$x<-1$ 이면 $f'(x)>0$

$x>-1$ 이면 $f'(x)<0$

이므로 점 $x_1=-1$ 은 $f(x)$ 의 극대점이며 극대값은 $f(-1)=13$ 이다.



머물점 $x_2=2$ 의 가까이에서

$x<2$ 이면 $f'(x)<0$

$x>2$ 이면 $f'(x)>0$

이므로 점 $x_2=2$ 는 $f(x)$ 의 극소점이며 극소값은 $f(2)=-14$ 이다.

우에서 본 결과를 표로 만들어보면 다음과 같다.

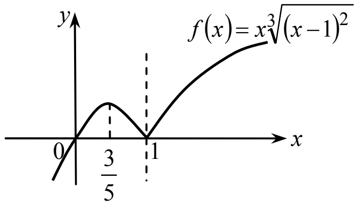
x	$-\infty\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗ 증가	13 극대	↘ 감소	-14 극소	↗ 증가

［례］ 함수 $f(x)=x\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$이다.

① 극값점으로 될수 있는 머물점, 미분불가능한 점들을 구하기 위하여 먼저 도함수를 구한다.

$$f'(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{3(x-1)+2x}{3\sqrt[3]{x-1}}=\frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

머물점은 $x_1=\frac{3}{5}$, 미분불가능한 점은 $x_2=1$이다.



② 머물점과 미분불가능한 점들에 의하여 구간을 분할하고 매 구간에서 도함수의 부호변화를 살펴 극값점을 구한다.

x	$-\infty\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	1	$\cdots+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	없다. (∞)	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

③ 극값점들을 함수에 갈아넣어 극값을 구한다.

$$f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\quad 극대값$$

$$f(1)=0:\quad 극소값$$

[2계도함수에 의한 극값점의 판정조건]

두번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0,\ f''(a)\neq 0$이라고 하자. 이때

① $f''(a)>0$이면 점 a는 $f(x)$의 극소점

② $f''(a)<0$이면 점 a는 $f(x)$의 극대점

［례］ 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+1$의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$이다.

도함수를 구하면

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$f''(x)=12x-6=6(2x-1)$$

$f'(x)=0$을 풀어 머물점을 구하면

$$x_1=0,\quad x_2=1$$

매개 머물점에서 $f''(x)$의 부호를 살피자.

머물점 $x_1=0$에서

$$f''(0)=6(2\cdot 0-1)=-6<0$$

$$\therefore\ f(0)=1\text{ : 극대값}$$

머물점 $x_2=1$에서

$$f''(1)=6(2\cdot 1-1)=6>0$$

$$\therefore\ f(1)=0\text{ : 극소값}$$

[최대값과 최소값]

함수의 뜻구역에 속하는 모든 점에서의 함수값들가운데서 가장 큰 값을 **최대값**, 가장 작은 값을 **최소값**이라고 부른다.

함수의 최대값과 최소값은 다음과 같이 구한다.

① $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 련속이면 이 구간에서 최대값과 최소값을 가진다.

이 경우에 $(a,\ b)$에서 $f(x)$의 모든 극대값과 극소값을 구하고 여기에 끝점에서의 함수값 $f(a)$, $f(b)$를 덧붙여 이가운데서 가장 큰 값을 최대값으로, 가장 작은 값을

최소값으로 잡으면 된다.

② $f(x)$ 가 $[a,\ b]$ 에서 증가(감소)함수일 때에는 끝점에서의 함수값이 최대값(최소값)으로 된다.

즉 $f(x)$ 가 $[a,\ b]$ 에서 증가(감소)함수라면 $f(a)$ 는 최소값(최대값), $f(b)$ 는 최대값(최소값)으로 된다.

③ $f(x)$ 가 구간 $(a,\ b)$ 에서 련속이면 이 구간에서 최대값, 최소값이 있을수도 있고 없을수도 있다. 그러나 최대값, 최소값이 있다는것이 알려졌다면 극대값들가운데서 가장 큰 값이 최대값, 극소값들가운데서 가장 작은 값이 최소값으로 된다.

④ 만일 $f(x)$ 가 어떤 구간(유한 또는 무한)에서 련속이고 주어진 구간에서 단 하나의 극값을 가질 때 바로 그것이 극대값이면 곧 그것이 최대값으로 되고 극소값이면 그것이 곧 최소값으로 된다.

［례］ 구간 $[-1,\ 2]$ 에서 함수 $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3$ 의 최대값과 최소값을 구하기 위하여 먼저 $(-1,\ 2)$ 에서 극대값과 극소값을 구한다.

$$f'(x)=x^2-4x=x(x-4)$$

$$f''(x)=2x-4$$

머물점은 $x_1=0$, $x_2=4$ 이다. 그런데 $x_2=4$ 는 구간 $(-1,\ 2)$ 밖의 점이므로 버린다.

$x_1=0$ 에서 $f''(x)$ 의 부호를 보면

$$f''(0)=2\cdot 0-4=-4<0$$

$$\therefore\ f(0)=3 : \text{극대값}$$

$(-1,\ 2)$ 에서 $f(x)$ 의 극소점은 없다.

다음으로 $[-1,\ 2]$ 의 끝점에서의 함수값을 구하면

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2+3=\frac{2}{3}$$

$$f(2)=\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+3=-2\frac{1}{3}$$

이리하여 $[-1,\ 2]$에서 주어진 함수 $f(x)$의 최대값은 $f(0)=3$이고 최소값은 $f(2)=-2\frac{1}{3}$이다.

[미분과 함수값의 근사계산]

함수 $y=f(x)$가 도함수 $f'(x)$를 가진다고 하자.

함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(x)\Delta x$를 함수 $y=f(x)$의 **미분**이라고 부르고 dy로 표시한다.

즉 $dy=f'(x)\Delta x$

따라서 우의 근사식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$$

독립변수 x의 미분은 그 증분 Δx로 정의한다.

즉 $dx=\Delta x$를 쓰면 $dy=f'(x)dx$

[례] $y=x^3$의 미분은 $dy=(x^3)'dx=3x^2dx$

$y=\cos x$의 미분은 $dy=(\cos x)'dx=-\sin xdx$

근사식 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy=f'(x)\Delta x$로부터 함수값에 대한 다음의 근사식을 얻는다.

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

특히 $x=0$이면

$$f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x$$

흔히 쓰는 근사공식은 다음과 같다.

- $f(x)=x^{\alpha}\ (\alpha\in \mathrm{R})$일 때

$$(x+\Delta x)^{\alpha}\approx x^{\alpha}+\alpha x^{\alpha-1}\Delta x$$

특히 $x=1$이면 $(1+\Delta x)^{\alpha}\approx 1+\alpha\Delta x$

- $f(x)=\sin x$일 때

$$\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\cdot\Delta x$$

특히 $x=0$이면 $\sin\Delta x\approx\Delta x$

[례] $1.02^2=(1+0.02)^2\approx 1+2\cdot 0.02=1.04$

$$\sqrt{0.964}=\sqrt{1-0.036}\approx 1-\frac{1}{2}0.036=0.982$$

$\sin 1^\circ$의 근사값은 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$이므로

$$\sin 1^\circ=\sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}\approx 0.0175$$

상 식

만능가형의 수학자
빵까레(1854-1912, 프랑스)

빵까레는 어려서부터 기억력이 특출하였다. 그는 눈으로 본 모든것을 정확히 기억할수 있었고 책에서 읽은것은 어느 페지, 어느 대목에 무슨 내용이 있다는것까지 죄다 이야기하였다고 한다. 대학입학시험때에 《나라는 어떻게 하면 부흥되는가?》라는 작문시험지를 얼마나 잘 썼던지 시험관이 감격을 금치 못하였다는 일화도 있다.

빵까레는 중학교시절에 수학시험성적이 0점이였던적도 있다. 그러던 빵까레가 수학에로 학습방향을 돌린 다음 1872년 수학경연에서는 단연 첫자리를 차지하였다.

빵까레는 34살에 원사가 되고 500여건의 저작을 남기였다.

그중 수학분야가 166건, 력학분야가 110건, 물리학분야가 120건이다. 수학분야에서는 미분방정식이 68건, 함수론이 44건, 대수와 수론이 28건, 기하학이 14건, 대수적위상기하학이 12건이다. 빵까레는 《빵까레가설》을 제기한것으로 하여 더 이름이 났다.

제14장. 적 분

1. 부정적분과 정적분

[원시함수]

함수 $\mathrm{F}(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때 즉

$$\mathrm{F}'(x)=f(x)$$

일 때 함수 $\mathrm{F}(x)$를 함수 $f(x)$의 **원시함수**라고 부른다.

［례］ $(x^3)'=3x^2$이므로 $\mathrm{F}(x)=x^3$은 $f(x)=3x^2$의 원시함수이고 $(x^3+5)'=3x^2$이므로 $\mathrm{F}(x)=x^3+5$도 $f(x)=3x^2$의 원시함수이다.

［례］ $v=gt$의 원시함수는 $s=\frac{1}{2}gt^2$이다. （$\because\ s'=v$）

함수 $\mathrm{F}(x)$가 $f(x)$의 한 원시함수이면 $f(x)$의 모든 원시함수는

$$\mathrm{F}(x)+c \text{ (}c\text{ 는 상수)}$$

모양을 가진다.

[부정적분]

함수 $f(x)$의 한 원시함수를 $\mathrm{F}(x)$라고 할 때

$$\mathrm{F}(x)+c \text{ (}c\text{ 는 임의의 상수)}$$

를 함수 $f(x)$의 **부정적분**이라고 부르고

$$\int f(x)dx$$

로 표시한다.

$$\mathrm{F}'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx=\mathrm{F}(x)+c$$

一 기본적분공식과 적분계산규칙

함수의 부정적분을 구하는것을 그 함수를 **적분한다**고 말하며 부정적분을 구하는 산법을 **적분법**이라고 부른다.

적분법은 미분법의 거꿀산법이므로 도함수공식으로부터 부정적분의 다음 공식들을 얻는다.

부정적분의 기본적분공식

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+c$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c \qquad (a>0,\quad a\neq 1)$$

$$\int \cos x dx=\sin x+c$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+c$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2}x}dx=\tan x+c$$

$$\int \frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\cot x+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+c$$

부정적분의 정의로부터 다음 식이 나온다.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

$$\int f'(x)dx=f(x)+c \text{ (} c \text{ 는 상수)}$$

또한 미분법의 규칙으로부터 다음과 같은 적분계산규칙을 얻을수 있다.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \ (k \text{는 상수})$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

［례］ ① $\int (2x+\cos x)dx = \int 2xdx + \int \cos xdx =$

$$= 2\int xdx + \int \cos xdx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + c_1 + \sin x + c_2$$

$$= x^2 + \sin x + c \quad (c = c_1 + c_2)$$

② $\int (x^2 - 3e^x + 5)dx = \int x^2dx - 3\int e^xdx + 5\int dx =$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 3e^x + 5x + c$$

[정적분]

함수 $f(x)$가 구간 $[a, \ b]$에서 주어졌다고 하자.

① 구간 $[a, \ b]$를 다음과 같은 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

② 매개 나눔구간 $[x_{i-1}, \ x_i] \ (i = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots, \ n)$에서 임의로 한 점 ξ_i를 잡고 적

$$f(\xi_i)\Delta x$$

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

을 구한다.

③ 우에서 계산한 적들의 합

$$f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_n)\Delta x$$

을 구한다.

이 합을

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

로 표시하고 함수 $f(x)$의 $[a,\ b]$에서의 **적분합**이라고 부른다.

④ 적분합 S_n은 구간 $[a,\ b]$를 같게 나눈 나눔점들의 개수 n과 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 점 ξ_i를 어떻게 잡는가에 따라 달라진다. 그러므로 극한

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

는 점 ξ_i를 어떻게 잡는가에 관계된다.

그러나 련속함수 $f(x)$에 대해서는 이 극한이 ξ_i를 어떻게 잡는가에 관계없이 늘 있으며 그 극한은 늘 같다.

이 극한을 련속함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 부르고

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 표시한다.

다시말하면 정적분은 적분합의 극한(유한인 수)을 말한다. 즉

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

여기서 a를 적분의 **아래끝**, b를 적분의 **웃끝**, $f(x)$를 **적분할함수**, x를 **적분변수**라고 부른다.

구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 정적분이 존재하면 $f(x)$는 $[a,\ b]$에서 적분가능하다고 말한다.

(주의) ① 우에서 적분의 웃끝 b가 아래끝 a보다 큰 경우 즉 $a<b$인 경우의 정적분을 정의하였다.

적분의 웃끝 b가 아래끝 a보다 작거나 같은 경우는 다음과 같이 정의한다.

$$a=b \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx=0$$

$$a>b \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

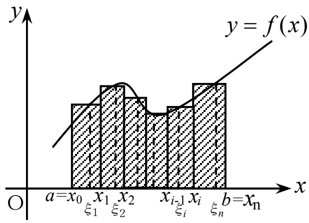
② 적분합의 정의에서 구간 $[a,\ b]$를 꼭 같게 나누어야 하는것은 아니다. 아무런 방법으로 나누어도 그 의미는 달라지지 않는다.

[정적분의 기하학적의미]

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$이고 련속이라고 하자.

정적분의 정의에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$



그런데 $f(\xi_i)\Delta x$는 밑변의 길이가 Δx, 높이가 $f(\xi_i)$인 직4각형의 면적이고 합 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$는 계단도형($n$개의 직4각형들로 된)의 면적과 같다.

따라서 적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 곡선제형의 면적과 같다.

[정적분의 력학적의미]

질점이 직선을 따라 속도 $v=f(t)$로 운동할 때 시간 t_1에서 t_2까지 사이에 지나간 거리는

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

이다. 사실

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t$$

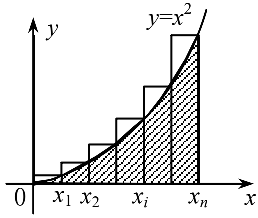
인데 $f(\xi_i)\Delta t$ 는 Δt 시간동안에 평균속도 $f(\xi_i)$ 로 이동한 거리이고

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t$$

은 $t_2 - t_1$ 시간동안에 이동한 거리와 근사적으로 같다.

$n\to\infty$ 일 때 이 값은 S로 된다.

［례］ $\int_0^1 x^2 dx$ 는 기하학적으로 보면 다음 그림에서 빗선을 친 부분의 면적과 같다.



구간 $[0,\ 1]$을 다음과 같은 점들로 n등분하자.

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, $\cdots$, $x_i = \frac{i}{n}$, $\cdots$, $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, $x_n = 1$

이때 $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

매개 나눔구간 $[x_{i-1},\ x_i]$ 에서 ξ_i 로서 오른쪽 끝점 $x_i = \frac{i}{n}$ 를 잡으면

$$f(\xi_i)\Delta x = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{i^2}{n^3}$$

그러므로 적분합은

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

$$즉\quad \int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

[적분학의 기본공식](뉴톤-라이브니쯔공식)

함수 $f(x)$ 가 $[a,\ b]$ 에서 련속이면 $f(x)$ 의 임의의 원시함수 $F(x)$ 에 대하여 다음 공식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

즉 $f(x)$ 의 $[a,\ b]$ 에서의 적분은 $f(x)$ 의 원시함수 $F(x)$ 를 알면 곧 구할수 있다.

이 공식을 **적분학의 기본공식**이라고 부른다.

적분학의 기본공식을 보통 간단히 다음과 같이 표시한다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$$

정적분은 부정적분을 구할수 있으면 적분학의 기본공식에 의하여 쉽게 계산된다. 즉

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=f(x)dx\Big|_a^b,\quad F'(x)=f(x)$$

정적분의 계산규칙

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k 는 상수)

② $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

[례] $\int_{1}^{2} 3x^2 dx = 3\int_{1}^{2} x^2 dx = x^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

[례] $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$

$$= (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0 - \cos 0) = 2$$

정적분에서는 또한 다음과 같은 중요한 성질이 성립하며 적분계산에서 널리 쓰인다.

③ $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx \quad c \in (a,\ b)$

[례] $\int_{0}^{3} |x-2| dx$ 를 구하여라.

풀이. $|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & 0 \le x \le 2 \\ x-2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

이므로

$$\int_{0}^{3} |x-2| dx = \int_{0}^{2} [-(x-2)]dx + \int_{2}^{3} (x-2)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

2. 적분계산법

[부정적분계산법]

— 치환적분법

부정적분 $\int f(x)dx$ 에서 적분변수 x 를 다음과 같이 바꾸자.

$$x = \varphi(t)$$

여기서 $\varphi(t)$ 는 도함수 $\varphi'(t)$ 를 가지며 거꿀함수 $t = \varphi^{-1}(x)$ 를 가진다.

이때 $dx = \varphi'(t)dt$

이것들을 부정적분에 갈아넣으면

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

이 공식을 **치환적분공식**이라고 부르고 이 공식에 의한 적분방법을 **치환적분법**이라고 부른다.

[례] $\int (4x+1)^3 dx$ 를 구하여라.

$4x+1=t$ 즉 $x = \dfrac{t-1}{4}$ 로 바꾸면

$$(4x+1)^3 = t^3\ ,\quad dx = \frac{1}{4}dt$$

$$\int (4x+1)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^3 dt = \frac{t^4}{16} + c = \frac{(4x+1)^4}{16} + c$$

다음의 적분공식이 성립한다.

① $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b) + c$

② $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

[례] $\displaystyle\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$$

— **부분적분법**

적분할 함수가 두 함수의 적으로 표시되여있는 경우 그에 대한 부정적분을 구할 때 그것을 그와 다른 두 함수의 적의 부정적분을 구하는 문제로 고쳐서 적분계산할수 있다. 즉

$$\int u\cdot v'dx = uv - \int u'\cdot vdx$$

이 공식을 **부분적분공식**, 이 공식에 의한 적분방법을 **부분적분법**이라고 부른다.

[례] $\int x\cdot\cos xdx$

풀이. $u = x$, $v' = \cos x$

$u' = 1$, $v = \sin x$ 이므로

$$\int x\cdot\cos xdx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin xdx$$

$$\therefore \int x\cos xdx = x\sin x + \cos x + c$$

[례] $\int \ln xdx$

풀이. $u = \ln x$, $v' = 1$

$u' = \frac{1}{x}$, $v = x$ 이므로

$$\int \ln xdx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\cdot\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

[정적분계산법]

— **치환적분법**

정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 를 계산할 때 원시함수를 구하기 위하여 변수 x 를 관계식 $x = \varphi(t)$ 에 의하여 t 로 바꾸면 x 의 모든 구간 $[a, b]$ 를 $[\varphi(a), \varphi(b)]$ 로 바꾸어야 한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$$

[례] $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$ 를 구하여라.

치환 $1+x^3=t$ 라고 하면

$$3x^2dx=dt, \qquad dx=\frac{1}{3x^2}dt$$

그리고 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이며 x 가 $[0,\ 1]$ 에서 변할 때 t 는 $[1,\ 2]$ 에서 변한다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx=\int_1^2 \frac{x^2}{t}\cdot\frac{1}{3x^2}dt=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{3}\ln|t|\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{3}\ln 2$$

[례] $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$ 를 구하여라.

$x=a\sin t$ 라고 놓으면 $dx=a\cos t\,dt$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=\frac{\pi}{2}$

이며 x 가 $[0,\ a]$ 에서 변할 때 t 는 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 변한다. 따라서

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

— **부분적분법**

정적분에서도 부정적분의 부분적분공식과 비슷한 공식이 성립한다. 즉

$$\int_a^b uv'dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

［례］ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

풀이. $u=x,\ \ v'=\cos x$

$u'=1,\ \ v=\sin x$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

［례］ $\int_1^2 x\ln x dx$

풀이. $u=\ln x,\ \ v'=x$

$u'=\frac{1}{x},\ \ v=\frac{x^2}{2}$ 이므로

$$\int_1^2 \ln x\cdot x dx = \ln x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = \ln 4 - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

3. 복잡한 함수의 적분

[유리함수의 적분]

$\mathrm{P}(x)$ 와 $\mathrm{Q}(x)$ 가 여러마디식일 때 $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ 모양으로 표시되는 함수를 **유리함수**라고 부른다.

유리함수가운데서 유리옹근함수(여러마디식)의 적분은 기본적분공식에 의하여 쉽게 구할수 있으므로 $\mathrm{Q}(x)$ 가 1차 이상의 여러마디식인 경우 즉 적분할 함수가 분수식인 경우의 적분만을 보기로 한다.

분자의 차수가 분모의 차수보다 낮으면 그것을 **참분수함수**(또는 **참분수식**)라고 부른다.

참분수식이 아닌 유리함수는 분자를 분모로 나누어 여러마디식과 참분수식의 합으로 표시할수 있다.

참분수식은 분모가 1차식 또는 2차식 또는 그것들의 제곱인 참분수식들의 합으로 분해하여 적분한다.

[례] $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4}dx$ 에서 적분할 함수 $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$ 을 다음과 같이 변형한다.

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x+2}$$

A, B를 정하기 위하여 오른변을 통분하고 두 변의 분자를 비교하면

$$1=\mathrm{A}(x+2)+\mathrm{B}(x-2)$$

$$1=\mathrm{A}x+\mathrm{B}x+2\mathrm{A}-2\mathrm{B}=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+2(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

이 같기식은 늘같기식이므로

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=0\\ 2(\mathrm{A}-\mathrm{B})=1\end{cases}$$

이것을 풀면 $\mathrm{A}=\dfrac{1}{4},\quad \mathrm{B}=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$

이리하여

$$\int\frac{1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$$

[무리함수의 적분]

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 모양의 적분은 $a>0$ 일 때 오일레르치환 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ 를 적용하면 유리함수의 적분으로 넘어간다.

$c>0$ 인 경우에도 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$ 로, $ax^2+bx+c=0$ 이 서로 다른 실수풀이 α, β 를 가지는 경우에는 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ 로 치환한다.

[례] $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ 를 계산하여라.

$\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ 로 치환하면

$$x=\frac{t^2-a^2}{2t},\quad dx=\frac{t^2+a^2}{2t}dt$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t}$$

따라서 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{2t(t^2+a^2)}{2t^2(t^2+a^2)}dt=\int\frac{dt}{t}=$

$$=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

[삼각함수의 적분]

$$\int \sin mx \cos nx dx,\ \int \cos mx \cos nx dx,\ \int \sin mx \sin nx dx$$

모양의 적분은 다음과 같은 삼각공식을 써서 적분할 함수를 합 또는 차로 고쳐서 계산한다.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

[례] $\int \sin 3x \cos x dx$ 에서

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$$ 이므로

$$\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 4x dx + \int \sin 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) + c$$

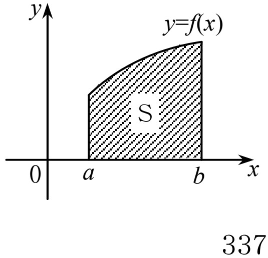
$$= -\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + c$$

4. 적분의 응용

[평면도형의 면적계산]

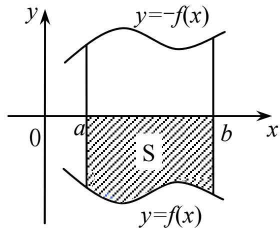
○ 곡선 $y = f(x)\ (\geq 0)$ 와 두 직선 $x = a,\ x = b$ 및 x 축으로 둘러싸인 곡선제형의 면적 S는

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



○ 만일 $[a, b]$에서 $f(x)<0$이면

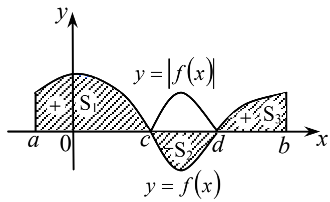
$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



○ 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀔 때에는 $f(x)\geq 0$인 부분과 $f(x)\leq 0$인 부분의 면적을 각각 구하여 더하면 된다.

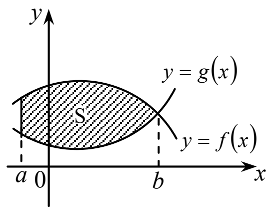
일반적으로

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



○ $[a, b]$에서 $f(x)\geq g(x)$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 면적 S는

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$



［례］ 포물선 $y=x^2+x-2$와 직선 $y=x-1$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

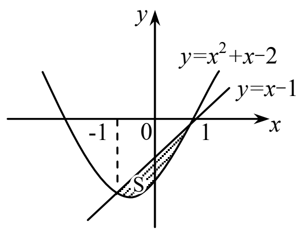
먼저 포물선과 직선과의 사귐점의 x자리표를 구하기 위하여 련립방정식

$$\begin{cases} y=x^2+x-2 \\ y=x-1 \end{cases}$$

을 풀면

$$x^2+x-2=x-1$$
$$x^2-1=0$$

이므로 $x_1=-1$, $x_2=1$

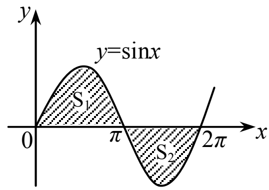


그림에서 볼수 있는것처럼 $[-1, 1]$ 에서 직선 $y=x-1$ 은 포물선 $y=x^2+x-2$ 우에 놓인다. 따라서 구하려는 도형의 면적 S는

$$S=\int_{-1}^{1}\left[(x-1)-\left(x^2+x-2\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

[례] 곡선 $y=\sin x\left(0\le x\le 2\pi\right)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.



$y=\sin x$ 는 $\left[0,\ 2\pi\right]$ 에서 부호를 바꾼다.

$\left[0,\ \pi\right]$ 에서 $\sin x\ge 0$ 이고 $\left[\pi,\ 2\pi\right]$ 에서 $\sin x\le 0$ 이므로

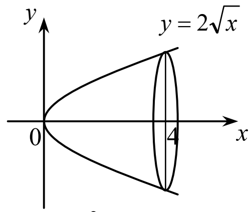
$$S=\int_{0}^{2\pi}\left|\sin x\right|dx=\int_{0}^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=4$$

[회전체의 체적계산]

직선 $x=a,\ x=b,\ y=0$ 및 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 곡선제형을 x 축주위로 돌릴 때 얻어지는 회전체의 체적 V는

$$V=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)dx \quad 또는 \quad V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx$$

[례] 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 와 직선 $x=4$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축주위로 돌릴 때 얻어지는 회전체의 체적은 공식에 의하여



$$V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx=\pi\int_{0}^{4}4xdx=\pi\cdot 2x^2\Big|_{0}^{4}=\pi\cdot 2\cdot 4^2=32\pi$$

[물체가 지나간 거리]

어떤 물체가 $v(t)$ 의 속도로 시간 $t=t_0$ 에서부터 $t=\mathrm{T}$ 까지 직선운동을 하였을 때 시간구간 $[t_0,\ \mathrm{T}]$ 사이에 물체가 지나간 거리 S는

$$\mathrm{S}=\int_{t_0}^{\mathrm{T}}|v(t)|dt$$

[례] 어떤 물체가 $v=\sqrt{1+t}$ m/s의 속도로 직선운동을 한다. 운동을 시작하여 처음 10초사이에 지나간 거리는 공식에 의하여

$$\mathrm{S}=\int_0^{10}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{11^3}-1\right)\approx 23.7\ (\mathrm{m})$$

[변하는 힘이 수행한 일]

x 축방향으로 작용하면서 크기가 변하는 힘을 받아 어떤 물체가 $x=a$ 에서부터 $x=b$ 까지 움직이면서 수행한 일은

$$\mathrm{F}=\mathrm{F}(x)\quad (a\le x\le b)$$

이므로

$$\mathrm{A}=\int_a^b F(x)dx$$

[례] 한끝이 고정되여있는 어떤 용수철을 1cm 늘구는데 1N의 힘이 든다. 이 용수철을 5cm 늘굴 때 힘이 하는 일은 $\mathrm{F}(x)=kx$ (후크의 법칙)

$x=0.01\,(\mathrm{m})$일 때 $\mathrm{F}=1\,(\mathrm{N})$이므로

$$1=k\cdot 0.01,\quad k=100$$

따라서 $\mathrm{F}(x)=100x$

$$\therefore\quad \mathrm{A}=\int_0^{0.05}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0.05}=0.125\,(\mathrm{J})$$

상식

큰 업적을 남긴 학자 뉴톤(1643-1727, 영국)

뉴톤은 팔삭둥이 유복자로 태여났다. 아이가 너무 작아 조산원과 동네사람들은 뉴톤이 얼마 살지 못할것이라고 말하였다고 한다.

11살 때 3년제 소학교에 들어갔는데 1학년때 학급에서 성적이 제일 낮았다. 바보로 놀림을 받던 뉴톤은 어느날 동무들한테서 되게 매를 얻어맞고 그날 밤을 뜬눈으로 새웠다고 한다.

그는 (… 내가 정말 바보일가? 나는 지금까지 공부를 열심히 하여본적이 한번도 없었다. 이제부터는 공부도 체력도 남에게 뒤지지 않도록 힘쓰자. …)라는 각오를 가지게 되였다. 14살 때 소학교를 졸업하고 집에서 어머니의 농사일을 도왔는데 《장난질》에 몰두할 때가 많았다. 그 과정에 집에 2개의 해시계도 만들어 걸었고 수차도 만들었다.

어린시절을 이렇게 보낸 뉴톤은 케임브리지대학을 졸업하고 유명한 수학자, 물리학자가 되였다.

그는 미적분을 발견하고 물리에서 뉴톤의 법칙을 발견하였다.

뉴톤은 일생 결혼도 하지 않고 과학탐구를 하였으며 세계적으로 유명한 학자가 된 다음에도 자기는 완강한 의지력과 잠을 적게 자는 습관 이외에 자기자신이 일반사람들과 그 어떤 차이가 있다는것을 인정하지 않았다.

제15장. 확률과 통계

1. 확 률

[시행과 사건]

우연현상이 일어나게 일정한 조건들을 지어주는것을 **시행**, 시행에 의하여 일어나는 결과를 **사건**이라고 부른다.

[례] 일정한 목표에 대하여 《사격을 한다.》는것은 시행이고 《목표에 맞는다.》, 《목표에 안맞는다.》 같은것은 사건이다.

[례] 《제품을 검사한다.》는것은 시행이고 《제품이 1등품이다.》, 《2등품이다.》같은것은 사건이다.

[례] 《표준대기압에서 물의 온도를 100℃이상으로 높인다.》는것은 시행이고 《물이 끓는다.》, 《물이 끓지 않는다.》같은것은 사건이다.

사건들을 글자 A, B, C, … 등으로 표시한다.

시행의 결과 반드시 일어나는 사건을 **확실한 사건**, 절대로 일어날수 없는 사건을 **불가능한 사건**, 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있는 사건을 **우연사건**이라고 부른다.

[요소사건공간]

어떤 시행에 대하여

1) 사건 e_1, e_2, …, e_n 가운데 적어도 하나는 반드시 일어나며 어느 두개도 함께 일어나지 않는다.

2) 모든 사건은 사건 e_1, e_2, …, e_n 가운데 어느 하나가 일어날 때에만 일어난다.

이때 e_1, e_2, …, e_n 을 **요소사건**이라고 부르며 요소사건전부의 모임을 **요소사건공간**이라고 부른다.

[례] 1부터 7까지의 수가 하나씩 적혀있는 7매의 카드가 통안에 들어있다. 통안에서 아무렇게나 한매의 카드를 꺼낼 때 수 i ($i=1, 2, \cdots, 7$)가 적혀있는 카드를 꺼낼 사건을 e_i 라고 하면 주어진 시행에서 요소사건공간은

$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

꺼낸 한매의 카드에 홀수가 적혀있을 사건은 요소사건

$$e_1, \quad e_3, \quad e_5, \quad e_7$$

로 이루어지며 짝수가 적혀있을 사건은 요소사건

$$e_2, \quad e_4, \quad e_6$$

으로 이루어진다.

[사건의 산법]

○ **합사건.** 두 사건 A와 B가운데서 적어도 하나가 일어나면 일어난다고 보는 사건 C를 A와 B의 **합사건**이라고 부르고

$$C=A\cup B$$

로 표시한다.

○ **적사건.** 두 사건 A와 B가 함께 일어나야만 일어난다고 보는 사건 C를 A와 B의 **적사건**이라고 부르고

$$C=A\cap B$$

로 표시한다.

○ **배반사건.** 두 사건 A와 B가 절대로 함께 일어날수 없을 때 사건 A와 B를 **배반사건**이라고 부른다.

○ **나머지사건.** 사건 A가 일어나지 않을 때 일어나는것으로 본 사건을 A의 **나머지사건**이라고 부르고 $\overline{A}$ 로 표시한다.

[사건의 확률]

1등품이 7개, 2등품이 3개 들어있는 통안에서 아무렇게나 한개의 제품을 꺼낸다고 하자. 이때 꺼낸 제품은 1등품일수도 있고 2등품일수도 있다.

즉 꺼낸 제품이 1등품일 사건은 우연사건이다.

그러나 이 사건이 아무리 우연사건이라고 하여도 통안에 1등품이 2등품보다 더 많이 들어있으므로 꺼낸것이 1등품일 사건이 2등품일 사건보다 일어날 가능성이 더 많다.

7개의 1등품을 a_1, a_2, …, a_7, 3개의 2등품을 a_8, a_9, a_{10}으로 표시하자.

한번의 시행에서 a_i $(i=1, 2, \cdots, 10)$가 꺼내질 사건을 e_i로 표시하면 요소사건공간은

$$\Omega=\{e_1, e_2, \cdots, e_{10}\}$$

이다. 그런데 매 시행에서 요소사건들이 일어날 가능성은 다 같다.

그러므로 매 요소사건이 일어날 가능성정도는 다 $\dfrac{1}{10}$이라고 볼수 있다.

한번의 시행에서 1등품이 나타날 사건을 A, 2등품이 나타날 사건을 B로 표시하면

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_7\}$$

$$B=\{a_8, a_9, a_{10}\}$$

사건 A는 10가지 경우가운데서 7가지 경우에 일어나므로 사건 A가 일어날 가능성정도는 $\dfrac{7}{10}$로 보며 마찬가지로 사건 B가 일어날 가능성정도는 $\dfrac{3}{10}$으로 보는것이 옳을것이다.

이와 같이 사건 A가 일어날 가능성정도를 표시하는 수를 사건 A의 **확률**이라고 부르고 P(A)로 표시한다.

2. 확률계산

[고전적확률]

요소사건공간이 n개의 원소로 되여있고 요소사건들이 일어날 가능성의 정도가 다 같을 때 사건 A가 $k(0\le k\le n)$ 개의 요소사건들로 된 사건이면 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 **고전적확률**이라고 부르고 $P(A)=\frac{k}{n}$로 표시한다.

우의 실례에서

$$P(A)=\frac{7}{10}, \quad P(B)=\frac{3}{10}$$

확실한 사건 U는 n번의 시행에서 n번 일어나므로

$$P(U)=\frac{n}{n}=1$$

불가능한 사건 ϕ는 n번의 시행에서 한번도 일어나지 않으므로

$$P(\phi)=\frac{0}{n}=0$$

우연사건 A는 n번의 시행에서 $m(0\le m\le n)$번 일어날 수 있으므로

$$0\le\frac{m}{n}\le1$$

$$0\le P(A)\le1$$

[례] 바른6면체의 6개의 면에 1부터 6까지의 수가 각각 하나씩 적혀있다. 이 바른6면체를 던질 때 웃면에 짝수가 나타날 확률은 얼마인가? 3의 배수가 나타날 확률은 얼마인가? 6의 약수가 나타날 확률은 얼마인가?

풀이. 바른6면체를 던졌을 때 웃면에 수 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 나타날수 있으므로 요소사건은 6가지이다.

짝수가 나타날 사건을 A라고 하면 A는 수자 2, 4, 6이 각각 나타나는 사건들로 이루어지므로

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

3의 배수가 나타날 사건을 B라고 하면 B는 수자 3, 6이 각각 나타나는 사건들로 이루어지므로

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

6의 약수가 나타날 사건을 C라고 하면 C는 수자 1, 2, 3, 6이 각각 나타나는 사건들로 이루어지므로

$$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

[례] 통안에 정수가 적힌 3매의 카드와 부수가 적힌 2매의 카드가 들어있다. 통안에서 아무렇게나 2매의 카드를 동시에 꺼낼 때

① 거기에 적힌 수들의 적이 정수일 확률은 얼마인가?

② 거기에 적힌 수들의 적이 부수일 확률은 얼마인가?

풀이. 통안에 5매의 카드가 들어있으므로 통안에서 아무렇게나 2매의 카드를 동시에 꺼내는 시행에서의 요소사건의 수는 C_5^2 이다.

① 수들의 적이 정수일 사건을 A라고 하면 A는 꺼낸 2매의 카드가 다 정수이거나 부수일 때 일어난다. 정수카드가 3매이므로 2매가 다 정수일 사건은 C_3^2 가지 요소사건에서, 2매가 다 부수일사건은 C_2^2 가지 요소사건에서 일어난다.

따라서 사건 A가 일어날 요소사건의 수는 $C_3^2+C_2^2$ 이고

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

② 수들의 적이 부수일 사건을 B라고 하면 B는 정수카드와 부수카드를 동시에 꺼냈을 때 일어난다. 정수카드 1매를 잡는 경우의 수는 C_3^1 이고 2매경우에 대하여 부수카드 1매를 잡는 경우의 수는 C_2^1 이므로 B가 일어날 요소사건의 수는 $C_3^1\times C_2^1$ 이고 따라서

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}=\frac{3\times 2}{10}=\frac{3}{5}$$

상식

우리 나라의 수학원사 조주경(1931-2002)

조주경은 지난 조국해방전쟁시기 의용군으로 인민군대에 탄원하여 적들과 싸우다가 한팔을 잃은 영예군인이다.

위대한 수령님께서는 그를 **김일성**종합대학에 보내주시고 마음껏 연구사업을 하도록 보살펴주시였다. 그는 확률적분방정식, 실험계획법 등 여러 분야의 과학연구사업을 진행하였다. 그의 연구에서 주목할만 한것은 확률미분방정식이다. 그는 이또가 준 가정보다 약한 가정밑에서 합성우연과정의 미분공식, 우연미분방정식의 풀이의 존재성, 유일성을 밝혔으며 다차원우연체계의 프로그람조종을 연구하였으며 많은 수학자들을 양성하였다.

조주경은 위대한 수령님의 크나큰 은정속에 원사, 교수, 박사, 인민과학자로 되였다.

[빈도률]

n번의 시행에서 사건 A가 k번 일어났다고 할 때 k를 사건 A의 **빈도수**, 비 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 **빈도률**이라고 부른다.

[통계적확률]

많은 실험의 결과는 시행을 많이 되풀이 할 때 사건 A의 빈도률이 일정한 수 P에 가까와간다는것을 보여준다. 이런 법칙성을 **통계적안정성**이라고 부른다.

그리고 일정한 수 P를 사건 A의 **통계적확률**이라고 부르고

$$P_ㅌ(A)$$

로 표시한다.

통계적확률을 구하자면 시행을 될수록 많이 되풀이하여야 하는데 이것은 실제적으로 곤난하므로 시행회수 n이 상당히 클 때의 빈도률 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 통계적확률로 본다.

[례] 어느 광산에서 어느해 상반년에 캐낸 류화철쇠돌을 분석한 결과 다음과 같은 표를 얻었다. 이 류화철쇠돌더미에서 아무렇게나 한덩이를 잡은것의 류황비률이 25~35%일 사건의 확률을 구하여라.

쇠돌에 있는 류황의 비률 / 달	25% 미만	25~35%	35% 초과	쇠돌시편의 수
1	10	90	8	108
2	7	87	10	104
3	8	100	12	120
4	6	95	9	110
5	9	105	11	125
6	8	112	13	133
계	48	589	63	700

이 사건을 A로 표시하면

$$P_{ㄷ}(A) \approx \frac{589}{700} \approx 0.84$$

매달의 빈도률을 계산하면

1월 $\frac{90}{108} \approx 0.83$ 2월 $\frac{87}{104} \approx 0.84$

3월 $\frac{100}{120} \approx 0.83$ 4월 $\frac{95}{110} \approx 0.86$

5월 $\frac{105}{125} \approx 0.84$ 6월 $\frac{112}{133} \approx 0.84$

이 빈도률의 평균값을 통계적확률로 볼수도 있다.

이때 $P_{ㄷ}(A) = \frac{0.83+0.84+0.83+0.86+0.84+0.84}{6} = 0.84$

A가 일어날 가능성의 정도가 같은 요소사건들로 갈라서 생각할수 있는 사건일 때에는

$$P_{ㄷ}(A) = P(A)$$

라는것이 경험적으로 알려져있다.

[확률의 기본정리]

○ **더하기정리.** 배반사건의 합사건의 확률은 매개 사건의 확률의 합과 같다.

즉 $A \cap B = \phi$ (불가능한 사건)이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

※ A와 B가 배반사건이라는것을 보통 $A \cap B = \phi$로 표시한다. 여기서 ϕ는 불가능한 사건이다.

○ **나머지사건의 정리**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

[례] 20마리의 토끼가운데 검은토끼가 7마리이고 나머지는 흰토끼이다. 이가운데서 아무렇게나 4마리의 토끼를 잡을 때 적어도 1마리가 검은토끼일 확률을 구하여라.

풀이. 잡은 4마리의 토끼가 모두 흰토끼일 사건을 A로 표시하면

$$P(A)=\frac{C_{13}^4}{C_{20}^4}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\frac{143}{969}$$

적어도 1마리가 검은토끼일 사건을 B로 표시하면

$$B=\overline{A}$$

따라서 $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{143}{969}=\frac{826}{969}$

○ **일반화된 더하기정리.** 두 사건 A와 B의 합사건의 확률은 A, B의 확률의 합에서 적사건 A∩B의 확률을 던 차와 같다.

즉 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

[례] 1부터 20까지의 수를 하나씩 써넣은 20매의 카드가운데서 아무렇게나 1매를 꺼낼 때 거기에 적혀있는 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 사건의 확률을 구하여라.

풀이. 2의 배수가 나올 사건을 A, 3의 배수가 나올 사건을 B라고 하면 구하려는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

그런데 $n(\Omega)=20,\quad n(A)=10,\quad n(B)=6$

그리고 A∩B는 2의 배수이면서 3의 배수일 사건이므로 6의 배수일 사건이다.

그러므로 $n(A\cap B)=3$

따라서 구하려는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$$

○ **곱하기정리**

조건부확률. 사건 A가 일어난 조건밑에서 사건 B가 일어날 확률을 **조건부확률**이라고 부르고

$$P_A(B)\ \text{또는}\ P(B/A)$$

로 표시한다.

［례］ 통안에 검은 공이 7개, 흰 공이 3개 들어있다. 이 통안에서 아무렇게나 1개를 꺼내고 또 1개를 꺼낸다고 하자. 이때 두번째로 꺼낸 공이 흰 공일 사건의 확률은 첫번째로 꺼낸것이 검은 공이면 $\frac{3}{9}$, 흰 공이면 $\frac{2}{9}$ 이다. 첫번째로 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 A, 흰 공일 사건을 $\overline{A}$, 두번째로 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 B라고 하면 사건 A가 일어난 조건에서 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{3}{9}$ 이고 사건 $\overline{A}$ 가 일어난 조건에서 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{2}{9}$ 이다.

곱하기정리. 두 사건 A와 B의 적사건의 확률은 A, B가운데서 한 사건의 확률에 이 사건이 일어난 조건밑에서 다른 사건이 일어날 조건부확률을 곱한적과 같다.

즉 $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$

［독립사건］

사건 A, B에서 어느 한 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어났는가 일어나지 않는가에 관계되지 않을 때 이 두 사건을 **독립사건**이라고 부른다.

사건 A, B가 독립사건이면

$$P_A(B)=P(B)\ ,\quad P_B(A)=P(A)$$

따라서 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

※ 두 사건 A, B에서 하나가 다른것이 일어나는가 일어나지 않는가에는 무관계하게 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있을 때 두 사건은 서로 **독립**이라고 말한다.

［례］ 두대의 기계가 한 교대동안에 고장없이 움직일 확률이 각각 0.95, 0.9이다. 기계들은 서로 독립적으로 움직인다고 할 때 한 교대동안에 두 기대가 다 고장없이 움직일 확률을 구하여라.

풀이. 매 기계가 한 교대동안에 고장없이 움직일 사건을 A, B라고 하면 두 기계가 다 고장없이 움직일 사건은 $A \cap B$이다. 그런데 A, B는 독립사건이고 $P(A)=0.95$, $P(B)=0.9$이므로 곱하기정리에 의하여

$$P(A \cap B)=P(A)P(B)=0.95 \times 0.9=0.855$$

3개이상의 사건에 대해서도 곱하기정리를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$P(A \cap B \cap C)=P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(C)$$

A, B, C가 서로 독립사건이면

$$P(A \cap B \cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

3. 확률분포

[우연량]

시행을 되풀이할 때마다 이러저러한 값을 잡는 량을 **우연량**이라고 부른다.

례를 들어 목표를 향해 총알을 3발 쏜다고 할 때 명중알수 x는 우연량이다. 이때 우연량 x는 0, 1, 2, 3 가운데서 어느 한 값을 잡는다.

[확률분포]

우연량이 잡을수 있는 매개 값에 그것을 잡을 확률을 대응시킨것을 **확률분포**라고 부른다.

［례］ 명중확률이 0.9인 총으로 2발 사격할 때 목표에 명중하는 총알수 x의 확률분포를 구하여라.

풀이. 매개 시행에서 목표에 명중하는 사건을 A로 표시하면 $\overline{A}$ 는 목표에 명중하지 못하는 사건이다. 문제의 조건에 의하여

$$P(A)=0.9$$

여기로부터 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.9=0.1$

목표에 한발도 맞히지 못하는 사건은 $\overline{A}\cap\overline{A}$ 이다. 따라서 목표에 한발도 명중하지 못할 확률은

$$P(x=0)=P(\overline{A}\cap\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})=0.1\times0.1=0.01$$

목표에 한발 맞히는 사건은

$$(A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap A)$$

이다. 그런데 $A\cap\overline{A}$ 와 $\overline{A}\cap A$ 는 배반사건들이므로

$$P(x=1)=P(A\cap\overline{A})+P(\overline{A}\cap A)$$
$$=0.9\times0.1+0.1\times0.9=0.18$$

그러므로 목표에 2발 맞히는 사건은 A∩A이므로

$$P(x=2)=P(A\cap A)=P(A),\ \ P(A)=0.9\times0.9=0.81$$

따라서 우연량 x의 확률분포표는 다음과 같다.

x	0	1	2
$P(x)$	0.01	0.18	0.81

여기서 $P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)=0.01+0.18+0.81=1$

확률분포표에서 확률들의 총합은 언제나 1과 같다. 이것은 시행을 할 때 우연량이 잡을수 있는 모든 값에 대하여 그것이 생길 사건들이 모두 서로 배반이고 그 값이 확실한 사건이기때문이다.

[례] 명중확률이 P인 총으로 목표에 대하여 3발 사격할 때 목표를 맞히는 총알수 x의 확률분포를 구하여라.

풀이. 매 사격에서 목표를 맞히는 사건을 A로 표시하면

$$P(A)=P,\quad P(\overline{A})=1-P(=q)$$

3발사격에서 목표에 0, 1, 2, 3발 맞히는 사건을 각각 B_0, B_1, B_2, B_3으로 표시하자. 그러면

$$B_0=\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A}$$

$$P(B_0)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=q^3$$

$$B_1=(A\cap\overline{A}\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap A)$$

$$P(B_1)=C_3^1P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})=C_3^1pqq=C_3^1pq^2$$

$$B_2=(A\cap A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap A\cap A)$$

$$P(B_2)=C_3^2P(A)P(A)P(\overline{A})=C_3^2p^2q$$

$$B_3=A\cap A\cap A$$

$$P(B_3)=C_3^3P(A)P(A)P(A)=C_3^3p^3$$

확률분포표를 만들면 다음과 같다.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$C_3^0q^3$	$C_3^1pq^2$	$C_3^2p^2q$	$C_3^3p^3$

[2마디분포]

한번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 P인 시행을 독립적으로 n번 되풀이할 때 사건 A가 m번 일어날 확률 $P_n(x=m)$은 다음과 같다.

$$P_n(x=m)=C_n^mp^mq^{n-m}\quad \text{여기서}\quad q=1-p$$

이 같기식의 오른변은 2마디공식의 일반마디와 같은 모양이므로 이와 같은 확률분포를 **2마디분포**라고 부른다.

2마디분포를 표로 표시하면 다음과 같다.

x	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n
$P(x)$	$C_n^0q^n$	$C_n^1pq^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^np^n$

[례] 같은 종류의 기대가 10대 있는데 기대의 정비를 위하여 매 기대가 멎을 확률은 0.2이다. 기대가 멎는 일은 서로 독립적이라고 할 때 어떤 순간에 멎어있는 기대수 x의 확률분포를 구하여라. 그리고 동시에 멎어있는 기대가 2대를 넘지 않을 확률을 구하여라.

풀이. 매 기대가 돌아가는 상태를 살펴보는것을 시행으로 보고 멎는 기대수를 x로 표시하자.

멎을 확률은 $p=0.2$

멎지 않을 확률은 $q=1-p=1-0.2=0.8$

$$P_{10}(x=0)=C_{10}^{0}\cdot 0.8^{10}\approx 0.11$$

$$P_{10}(x=1)=C_{10}^{1}\cdot 0.2\cdot 0.8^{9}\approx 0.27$$

$$P_{10}(x=2)=C_{10}^{2}\cdot 0.2^{2}\cdot 0.8^{8}\approx 0.30$$

$$P_{10}(x=3)=C_{10}^{3}\cdot 0.2^{3}\cdot 0.8^{7}\approx 0.20$$

$$P_{10}(x=4)=C_{10}^{4}\cdot 0.2^{4}\cdot 0.8^{6}\approx 0.09$$

$$P_{10}(x=5)=C_{10}^{5}\cdot 0.2^{5}\cdot 0.8^{5}\approx 0.03$$

$$P_{10}(x=6)=C_{10}^{6}\cdot 0.2^{6}\cdot 0.8^{4}\approx 0.01$$

$$P_{10}(x=7)=C_{10}^{7}\cdot 0.2^{7}\cdot 0.8^{3}\approx 0.00$$

$$P_{10}(x=8)=C_{10}^{8}\cdot 0.2^{8}\cdot 0.8^{2}\approx 0.00$$

$$P_{10}(x=9)=C_{10}^{9}\cdot 0.2^{9}\cdot 0.8\approx 0.00$$

$$P_{10}(x=10)=C_{10}^{10}\cdot 0.2^{10}\approx 0.00$$

확률분포표를 만들면 다음과 같다.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.11	0.27	0.30	0.20	0.09	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

멎는 기대가 동시에 2대를 넘지 않을 확률은

$$P(x\le 2)=P_{10}(x=0)+P_{10}(x=1)+P_{10}(x=2)$$
$$=0.11+0.27+0.30=0.68$$

상식

확률론을 공리화한 수학자

꼴모고로브(1903-1987, 로씨야)

꼴모고로브는 대학입학초기에 자기 나라 력사에 관심을 두고 로씨야력사학술론문까지 썼다. 그러다가 루진 등 이름있는 교수들의 강의에 참가하면서 루진의 제자가 되였다. 대학시기 꼴모고로브는 우리손의 3차원공간의 차원수에 관한 강의에서 오유를 발견하였던 일도 있다. 그는 대학 2학년때 해석모임론에 관한 론문을 썼는데 그것은 모스크바모임론연구집단의 새 출발로 되였다.

그는 대학생시절부터 확률론을 연구하여 확률론을 처음으로 공리화하였다. 그는 위상공간론에서 꼴모고로브의 분리공리를 제기하였으며 겔판드, 힌친을 비롯하여 우수한 수학자들을 많이 양성하였고 대백과사전과 여러 과학잡지의 편집에 참가하였다.

그는 생의 마지막시기까지 다년간 모스크바종합대학에서 뛰여난 중학교 학생들을 교육하는 《수학물리학교》의 《교장》으로 사업하였다.

그가 사망한 후 그 학교에 꼴모고로브이름을 붙이였다고 한다. 그는 이전 쏘련로력영웅이고 20여개 나라 과학기관의 명예칭호를 받은 이름난 원사였다.

[분포함수와 그 성질]

우연량 X가 임의의 실수 x보다 작은 값을 잡을 확률을 $P(X<x)=F(x)$라고 놓으면 $F(x)$는 x의 함수로 된다.

이것을 우연량 X의 **분포함수**라고 부른다. 특히 우연량 X가 $P(X=x_i)=P_i$이고 띠염우연량이면 그의 분포함수는

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P(x=x_i)$$

※ 우연량 X가 잡을수 있는 값들이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이고 이 값들을 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_n$의 확률로 잡을 때 우연량 X를 **띠염우연량**이라고 부른다.

○ **성질**

① x가 충분히 크면 사건 $X<x$는 거의 확실히 일어날것이므로 $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} P(X<x) = 1$

② x가 충분히 작으면 사건 $X<x$는 거의 일어나지 않을것이므로 $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} P(X<x) = 0$

③ $x_2 > x_1$이면 $(X<x_2) = (X<x_1)\cup(x_1 \le X \le x_2)$

따라서

$$F(x_2) = P(X<x_2) = P(X<x_1) + P(x_1 \le X \le x_2) =$$
$$= F(x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$$

그런데 $P(x_1 \le X \le x_2) \ge 0$이므로

$$F(x_2) \ge F(x_1)$$

즉 $x_2 > x_1 \to F(x_2) \ge F(x_1)$

[밀도함수와 그 성질]

우연량 X가 구간 $[x,\ x+\Delta x)$에 놓일 확률은

$$P(x \le X < x+\Delta x) = P(X<x+\Delta x) - P(X<x) =$$
$$= F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$$

$\Delta x \to 0$일 때 비 $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$의 극한이 있으면 이 극한을 우연량 X의 **밀도함수**라고 부르고 $f(x)$로 표시한다.

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

우연량 X가 밀도함수를 가질 때 이 우연량을 **련속 우연량**이라고 부른다.

○ **성질**

① 밀도함수는 부가 아니다. 즉 $f(x) \geq 0$

② 밀도함수의 무한구간 $(-\infty, +\infty)$에서의 적분은 1과 같다. 즉 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

[정규분포]

우연량 X의 밀도함수가

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma,\ m>0)$$

와 같이 표시될 때 X의 확률분포를 **정규분포**라고 부른다.

4. 수학적기대값

[수학적기대값]

띠염우연량 X의 가능한 값들을 x_1, x_2, …, x_n, 그 확률을 각각 P_1, P_2, …, P_n이라고 할 때

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

가 절대수렴하면 이것을 우연량 X의 **수학적기대값**이라고 부르고 MX로 표시한다. 즉

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i, \quad MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

○ **성질**

① 두 우연량 X, Y에 대하여 $M(X+Y)=MX+MY$

② 우연량 X에 대하여

$M(aX+b)=aMX+Mb$ (a, b는 일정한 수)

③ 우연량 X, Y가 독립이면 $M(XY)=MX\cdot MY$

[2제곱편차]

우연량 X와 MX와의 편차의 2제곱 $(X-MX)^2$의 수학적기대값을 우연량 X의 **2제곱편차**라고 부르고 DX로 표시한다. 즉 $DX=M(X-MX)^2$

[표준편차]

DX의 2차뿌리를 우연량 X의 **표준편차**라고 부르고 $\sigma(X)$와 같이 표시한다. 즉

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}=\sqrt{M(X-MX)^2}$$

2제곱편차 또는 표준편차는 우연량 X가 잡는 값전체가 수학적기대값으로부터 흩어져있는 정도를 나타내는 량이다.

[례] 2마디분포하는 우연량의 수학적기대값과 2제곱편차를 구하여라.

풀이. $P(X=k)=C_n^k p^k\cdot q^{n-k}\quad(k=0,\ 1,\cdots,\ n)$

$$MX=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k p^k\cdot q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=nP\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}\cdot q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np$$

즉 $MX=np$

$$DX=MX^2-(MX)^2=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k p^k q^{n-k}-(np)^2$$

그런데

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1)+k\right] \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

따라서 $\mathrm{DX} = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$$= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p) = npq$$

즉 $\mathrm{DX} = npq$

5. 통계자료의 정리

[통계자료의 정리]

통계란 어떤 현상이 특징짓는 자료들을 체계적으로 기록하여 놓은것을 말한다.

실례로 여러가지 제품의 생산량에 대한 자료, 생산물의 이러저러한 특성에 관한 자료, 자연현상이나 사회현상들에 대한 관측자료 같은것을 체계적으로 기록하여놓은것들은 모두 통계로 된다.

관측결과를 체계적으로 기록하여놓은것을 **통계자료**라고 부른다. 관측자료에 기초하여 관측한 대상의 특성을 분석하기 위하여 자료들을 분류하고 종합하는것을 **통계자료를 정리한다**고 말한다.

상식

우리 나라 수학자양성에서 큰 공적을 쌓은 김지정(1910-1998)

김지정은 위대한 수령님의 위촉장을 받고 공화국의 품에 안겨 1946년 **김일성**종합대학 창립때부터 강좌장으로 사업하면서 해석수학, 함수론, 확률론 등 여러 분야의 강의를 하여 우리 나라 수학학자들을 키워내는데 전심하였다.

그는 해석수학, 확률론, 실험계획법, 실변수함수론 등 수많은 대학교과서들과 함께 소학교 수학교과서를 현대화하는 사업에서 커다란 성과를 거두었다. 김지정은 어떤 나라에서 50여명의 과학집단이 동원되여 몇년동안 번역한 《이와나미 수학사전》을 번역하면서 동시에 수학의 다른 분야까지 학습한 다방면적인 지식을 가진 수학자였다.

위대한 수령님과 위대한 장군님의 크나큰 은정속에 그는 우리 나라의 첫 수학원사, 교수로 되였다.

[빈도수분포표]

다음 표는 어느 한 직장 종업원명단에 따르는 로동자들의 기능급수자료이다.

표 1

5	6	4	4	3	6	5	5	6	6
5	5	6	4	7	4	4	5	3	7
5	4	6	5	5	5	6	3	7	3
5	7	7	5	4	5	6	5	4	5
4	5	7	6	4	6	3	5	5	4

1) 이 직장 로동자들의 기능급수가 몇급부터 몇급까지인가?

2) 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 많고 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 적은가?

3) 이것을 한눈에 알아보자면 표를 어떻게 작성하면 되는가?

이 통계를 다음과 같이 작성하면 직장의 종업원들의 기능급수에 대한 정확한 인식을 가질수 있다.

급수	3	4	5	6	7	계
인원	5	11	18	10	6	50

이와 같이 관측자료를 특성이 같은것끼리 조를 편성하여 놓을수 있다.

［례］ 다음 표는 20차례에 걸쳐 진행한 어느 학급 학생들의 시험성적을 학생별로 종합하여 써놓은 표이다. 여기서 《학생》칸의 수들은 출석부번호이다.

표 2

학생	성적	학생	성적	학생	성적	학생	성적
1	72	11	63	21	58	31	86
2	83	12	88	22	53	32	100
3	57	13	79	23	86	33	82
4	84	14	93	24	43	34	68
5	59	15	86	25	80	35	96
6	90	16	59	26	89	36	64
7	68	17	86	27	79	37	70
8	55	18	71	28	76	38	53
9	96	19	62	29	99		
10	82	20	75	30	63		

이 표를 통하여 매 학생의 성적이나 성적의 한계는 알수 있으나 실력이 높은 학생수를 인차 알아보기 어렵다.

이 자료를 40점부터 100점까지를 10점간격으로 갈라놓고 거기에 해당한 학생수를 적는 방법으로 표를 작성하면 표 3과 같다.

표 3

점수구간	학생수
40～49	1
50～59	7
60～69	6
70～79	7
80～89	11
90～100	6
계	38

이와 같이 자료들을 정리하여 만든 구간을 **급**, 급사이의 너비를 **급간격**, 구간에 들어있는 자료의 개수를 그 **급의 빈도수**, 매 급의 가운데값을 **급중심**이라고 부르며 이런 표를 **빈도수분포표**라고 부른다.

우의 례에서 급간격: 10

급중심: 45, 55, 65, 75, 85, 95

급이나 자료수가 많은 경우에 빈도수분포표만 보고서는 례를 들어 59점미만은 몇명인가, 80점이상은 몇명인가 하는것을 인차 알아내기 어렵다.

그래서 빈도수의 루적을 생각할 때도 있다.

첫째 급으로부터 어떤 급까지의 빈도수를 다 더한것을 그 **급의 루적빈도수**라고 부르고 루적빈도수를 써넣은 빈도수분포표를 **루적빈도수분포표**라고 부른다.

[례] 표 4는 중학교 4학년 학생 40명의 키를 잰 결과를 기록한것이다. 이것을 가지고 급간격이 5cm인 빈도수분포표, 루적빈도수분포표를 만들어라.(첫째 급은 140이상, 144미만으로 하여라.)

표 4

학생	키(cm)	학생	키(cm)	학생	키(cm)	학생	키(cm)
1	161	11	157	21	174	31	159
2	153	12	163	22	163	32	166
3	168	13	164	23	150	33	172
4	156	14	154	24	158	34	149
5	163	15	162	25	160	35	162
6	154	16	164	26	153	36	165
7	164	17	159	27	163	37	152
8	163	18	147	28	158	38	167
9	155	19	163	29	144	38	157
10	156	20	158	30	165	40	168

급	빈도수
140～144	1
145～149	2
150～154	6
155～159	10
160～164	13
165～169	6
170～175	2
계	40

급	루적빈도수
140～144	1
145～149	3
150～154	9
155～159	19
160～164	32
165～169	38
170～175	40

[순서통계]

통계를 커지는 순서로 써넣은것을 **순서통계**라고 부른다.

순서통계에서 제일 작은 값(왼쪽에 있다.)을 **최소값**이라고 부르고 x_{min}로, 제일 큰 값을 **최대값**(오른쪽에 있다.)이라고 부르고 x_{max}로 표시한다.

그리고 $R = x_{max} - x_{min}$을 **분포범위**라고 부르며 가운데 있는 자료(개수가 홀수일 때는 가운데 위치에 있는 자료, 개수가 짝수일 때는 가운데 있는 두 자료의 합평균)을 **중위값**이라고 부르고 x_{me}로 표시한다.

[례] 학과경연에서 10명의 학생들이 얻은 점수자료는 다음과 같다.

28, 26, 24, 25, 25, 26, 27, 29, 23

순서통계는 23, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 28, 29

$x_{\min}=23$, $x_{\max}=29$, $\mathrm{R}=6$, $x_{me}=25.5$

6. 평균값과 추정

[평균값]

자료들의 총합을 자료의 개수로 나눈것을 **평균값**이라고 부르고 $\bar{x}$로 표시한다.

즉 n개의 자료 x_1, x_2, ⋯, x_n에 대하여

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \qquad (1)$$

자료가 그리 많지 않을 때에 매 자료를 하나하나 더할수 있지만 많은 자료를 다룰 때에는 빈도수분포형식으로 주어질수 있으므로 평균값으로 다음것을 리용한다.

자료가 빈도수분포표로 주어지면

급중심	x_1 x_2 ⋯⋯ x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 ⋯⋯ f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k}f_i=n\right) \qquad (2)$$

자료가 급분류빈도수분포표로 주어지면

자료	x_1 x_2 ⋯⋯ x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 ⋯⋯ f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x}\approx\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k}f_i=n\right) \qquad (3)$$

［례］ 표 2와 표 3을 가지고 평균성적을 계산하여 비교하여라.

(2)에 의해 구하면 평균성적은

$$\bar{x}=\frac{1}{38}(43+53\times2+55+\cdots+96\times2+99+100)$$

$$=\frac{2853}{38}\approx75.08$$

(3)에 의해 구하면

$$\bar{x}\approx\frac{1}{38}(45\times1+55\times7+65\times6+75\times7+85\times11+95\times6)$$

$$=\frac{2850}{38}=75$$

75는 평균성적 75.08의 근사값이다.

급중심 x_i 들가운데서 빈도수가 비교적 크고 거의 가운데 놓인 급의 급중심 a를 **가평균**이라고 부른다.

급간격이 h라고 할 때

$$u_i=\frac{1}{h}(x_i-a)\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k)$$

라고 놓으면 $x_i=a+u_ih$이므로

$$x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k=a(f_1+f_2+\cdots+f_k)+h(u_1f_1+\cdots+u_kf_k)$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\left(x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k\right)=a+\frac{h}{n}\left(u_1f_1+u_2f_2+\cdots+u_kf_k\right)$$

여기서 $\frac{1}{n}(u_1f_1+u_2f_2+\cdots+u_kf_k)=\bar{u}$ 라고 놓으면

$$\bar{x}=a+h\bar{u}$$

$\bar{u}$ 를 계산하는것은 $\bar{x}$ 를 계산하는것보다 간단하므로 이 식을 써서 평균값을 구하는것이 편리할 때가 많다.

[추정]

통계자료에 기초하여 모집단의 특성값(평균값과 분산)을 알아내는것을 **추정**이라고 부른다.

모집단의 수학적기대값을 **모평균**이라고 부르고 m 으로 표시하며 표준편차를 **모표준편차**라고 부르고 σ 로 표시한다.

표본의 평균값을 **표본평균**이라고 부르고 $\bar{x}$ 로 표시하며 표준편차를 **표본표준편차**라고 부르고 s 로 표시한다.

평균값이 m 이고 표준편차가 σ 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 꺼낼 때 n 이 충분히 크면 표본평균 $\bar{x}$ 는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 에 따른다.

특히 모집단이 정규분포에 따를 때 n 의 크기에 관계없이 $\bar{x}$ 는 정규분포에 따른다.

이 사실을 리용하여 모집단에서 임의로 꺼낸 분포의 크기 n 이 충분히 클 때 그 표본평균 $\bar{x}$ 를 알고 모평균 m 을 추정한다.

［례］ 표본의 크기 n 이 충분히 클 때 표본평균 $\bar{x}$ 에 의해 모평균 m 을 믿음 95.4%로 추정하여라.

표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본평균 $\bar{x}$ 는 정규분포

$$N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

에 따르며 $\bar{x}$ 가 취하는 값이

$$m-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le m+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

의 범위에 속할 확률은 0.954이다.

이 안같기식을 고쳐쓰면

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

이것은 95.4%의 범위에서 m 이 $\bar{x}$ 에 의해 정해진다는것을 의미한다.

표본을 꺼낼 때마다 $\overline{x}$의 값에 대하여 범위 (*)에 m이 포함되지 않을수 있다 그러나 표본을 100번 꺼내면 약 95번 정도는 값 $\overline{x}$에 대하여 범위 (*)에 m이 포함된다는것을 의미한다.

따라서 범위 (*)는 믿음도가 95.4%인 m에 대한 믿음구간으로 된다.

모표준편차 σ의 값을 확정하지 못하는 경우가 보통 제기된다. 그러나 표본의 크기 n이 충분히 클 때에는 σ를 표본표준편차 s로 바꾸어도 큰 차이가 생기지 않는다. 이리하여 모평균 m을 다음과 같이 추정한다.

모평균 m에 대하여 믿음도 95.4%의 믿음구간을

$$\overline{x}-\frac{2s}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{2s}{\sqrt{n}}$$

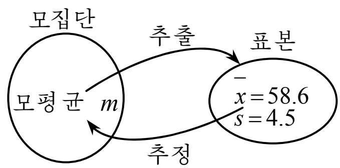
99.7%의 믿음구간은

$$\overline{x}-\frac{3s}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{3s}{\sqrt{n}}$$

[례] 어느 중학교 남학생들가운데서 임의로 선출된 81명의 몸질량의 평균값이 58.6kg, 표준편차가 4.5kg일 때 이 학교 남학생전체의 몸질량의 평균값을 믿음도 95.4%로 추정하여라.

$n=81,\ \ \overline{x}=58.6,\ \ s=4.5$ 이므로

$$\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{4.5}{\sqrt{81}}=0.5$$



따라서 이 중학교 남학생의 몸질량의 평균값 m을 믿음도 95.4%로

$$58.6-2\times0.5\le m\le 58.6+2\times0.5$$

즉 $57.6\le m\le 59.6$으로 추정할수 있다.

수학공식과 기호

수학공식

1. 수

[자연수]

— 더하기성질

$a+b=b+a$ (바꿈법칙)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (묶음법칙)

$a+0=a,\quad 0+a=a$

— 곱하기성질

$a\times b=b\times a$ (바꿈법칙)

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (묶음법칙)

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (분배법칙)

$a\times 0=0,\ 0\times a=0$

$a\times 1=a,\ 1\times a=a$

— 배수의 성질

a의 배수＋a의 배수＝a의 배수

a의 배수×k＝a의 배수

— 두 수의 최대공통약수와 최소공통배수사이의 관계

$(a,\ b)[a,\ b]=ab$

[분수]

— 분수의 크기

$n>m$ 일 때 $\dfrac{n}{p}>\dfrac{m}{p},\quad \dfrac{q}{n}<\dfrac{q}{m}$

— 분수의 기본성질

$\dfrac{n}{m}=\dfrac{n\times p}{m\times p},\quad \dfrac{n}{m}=\dfrac{n\div p}{m\div p}\ (p\neq 0)$

— **분수의 사칙산법**

$\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\pm b}{m}$ (분모가 다르면 통분하여 같게 만든다.)

$\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}=\frac{n\times q}{m\times p}$

$\frac{n}{m}\div\frac{q}{p}=\frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$

거꿀수

[퍼센트]

— **전체와 다른 수의 퍼센트를 알고 그 다른 수를 구하기**

$x=\frac{B\times A}{100}$ (A: 퍼센트수, B: 전체)

— **어떤 수와 그 퍼센트를 알고 전체를 구하기**

$x=\frac{B\times 100}{A}$ (A: 퍼센트수, B: 어떤 수)

— **전체와 다른 수를 알고 다른 수의 퍼센트를 구하기**

$x=\frac{A\times 100}{B}$ (B: 전체, A: 다른 수)

[정수와 부수]

— **수의 크기비교**

- 정수는 절대값이 클수록 크다.
- 정수는 0보다 크고 부수는 0보다 작다.
- 부수는 절대값이 클수록 작다.

— **부호가 같은 두 수의 더하기**

a, b가 정수일 때

$a+b=+(a+b)$

$(-a)+(-b)=-(a+b)$

— **부호가 다른 두 수의 더하기**

$|a|>|b|$이면

$a+(-b)=+(a-b)$

$(-a)+b=-(a-b)$

— 두 수의 덜기

$a - b = a + (-b)$

— 두 수의 곱하기

정수×부수⇒부수

부수×정수⇒부수

— 두 정수나 두 부수의 곱하기

정수×정수⇒정수

부수×부수⇒정수

— 두 수의 나누기

$a \div b = a \times \frac{1}{b}$

정수÷정수⇒정수

부수÷부수⇒정수

정수÷부수⇒부수

부수÷정수⇒부수

[복소수의 산법]

— 복소수의 더하기와 덜기

$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

— 복소수의 곱하기

$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

— 복소수의 나누기

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

— 복소수의 2 차뿌리

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right) \quad (b>0 \text{ 인 경우})$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right) \quad (b<0 \text{ 인 경우})$$

— 허수단위의 제곱

$i^{4K}=1$

$i^{4K+1}=i \quad (K=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$i^{4K+2}=-1$

$i^{4K+3}=-i$

[복소수의 삼각형식]

— 복소수의 절대값

$|a+b_i|=\sqrt{a^2+b^2}$

— 복소수의 편각

$\varphi=\arctan\frac{b}{a}$

— 복소수의 삼각형식으로의 표시

$\alpha=a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

[삼각형식으로 표시된 복소수의 산법]

— 곱하기와 나누기

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$

$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ 일 때

$$z_1\cdot z_2=r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

— 복소수의 n제곱공식(무아브르공식)

$2^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

— 복소수의 n차뿌리

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2K\pi}{n}\right)$$

$(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

— 1의 n 차뿌리

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2K\pi}{n}+i\sin\frac{2K\pi}{n}(K=0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\sqrt{1}=\{1,\ -1\}$$

$$\sqrt[3]{1}=\left\{1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$\sqrt[4]{1}=\{1,\ ,-1,\ i,\ -i\}$$

2. 식

[식쓰기 규칙]

$a\times b\times c=abc$, $a\times(-b)=a(-b)$, $3\times5=3\cdot5$

$a\times a\times b=a^2b$, $a\times3\times b\times2=6ab$

$a\div b=\frac{a}{b}$, $a\div2b=\frac{a}{2b}$ ($a\div(2b)$ 로 본다.)

[분수식]

— 분수식의 더하기와 덜기

· 분모가 같은 분수식의 더하기와 덜기

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}$$

· 분모가 다른 분수식의 더하기와 덜기

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}\pm\frac{B\cdot C}{B\cdot D}=\frac{A\cdot D\pm B\cdot C}{B\cdot D}$$

— 분수식의 곱하기와 나누기

· 분수식의 곱하기

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

· 분수식의 나누기

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$$

[나머지정리]

$$\mathrm{A}(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)+\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R}=\mathrm{A}(a)$$

[인수정리]

$$\mathrm{A}(a)=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}(x)=(x-a)\mathrm{Q}(x)$$

[곱하기공식과 인수분해공식]

— **곱하기공식**

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

— **인수분해공식**

$$am+bm-cm=(a+b-c)m$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$
$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$
$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

[늘같기식]

— **식변형에서 자주 쓰이는 늘같기식**

- $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$
- $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$
- $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$
- $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(b-c)(c-a)(a-b)$
- $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b)$
- $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

— 안같기식증명에서 자주 쓰이는 늘같기식

- $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax\pm by)^2+(ay\mp bx)^2$
- $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=$
  $=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$
- $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]$
- $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$
- $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$
- $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
- $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2$
  $ab=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2$

[지수법칙과 뿌리식]

— 지수법칙

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(m>n)$

② $(ab)^n=a^n\cdot b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

※ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$a^0=1$로 약속, $a^1=a$

※ $m=n \Leftrightarrow a^m=a^n$

$a>1$일 때 $m<n \Leftrightarrow a^m<a^n$

$0<a<1$일 때 $m<n \Leftrightarrow a^m>a^n$

— 뿌리식

- $\frac{1}{n}$제곱을 구하는 근사공식

$$\sqrt[n]{\mathrm{A}}=\sqrt[n]{a^n+b}=a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}\approx a\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a^n}\right)\right]\left(\frac{b}{a^n}<1\right)$$

· 뿌리식의 성질

① $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $(a\geq 0,\ b\geq 0)$

② $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a\geq 0,\ b>0)$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{a^n}=a$

③ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geq 0)$

④ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ $(a\geq 0)$

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $(a\geq 0)$

— **겹 $\frac{1}{n}$ 제곱의 공식**

· $x+y=a,\ xy=b,\ x>y$ 일 때 $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

· $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $(a>0,\ b>0,\ a^2>b)$

[로그식]

— **로그의 성질**

① $\log_a(\mathrm{M}\cdot\mathrm{N})=\log_a\mathrm{M}+\log_a\mathrm{N}$ $(\mathrm{M}>0,\ \mathrm{N}>0)$

② $\log_a\mathrm{M}^\alpha=\alpha\log_a\mathrm{M}$ $(\alpha\in\mathrm{R},\ \mathrm{M}>0)$

③ $\log_a\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}=\log_a\mathrm{M}-\log_a\mathrm{N}$ $(\mathrm{M}>0,\ \mathrm{N}>0)$

④ $\log_a\mathrm{M}=\frac{\log_b\mathrm{M}}{\log_b a}$ $(b\neq 1,\ b>0)$ (로그밑수변환공식)

※ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

※ $\mathrm{M}=\mathrm{N}\ (>0)\Leftrightarrow\log_a\mathrm{M}=\log_a\mathrm{N}$

$a>1$ 일 때 $\mathrm{M}>\mathrm{N}\ (>0)\Leftrightarrow\log_a\mathrm{M}>\log_a\mathrm{N}$

$0<a<1$ 일 때 $\mathrm{M}>\mathrm{N}\ (>0)\Leftrightarrow\log_a\mathrm{M}<\log_a\mathrm{N}$

— **상용로그와 자연로그와의 관계**

자연로그 $\ln M = \log_e M \quad (e = 2.71828\cdots)$

상용로그 $\lg M = \log_{10} M$

$$\ln M = \frac{\lg M}{\lg e} \left(\approx \frac{\lg M}{0.43429} \approx 2.30259 \lg M \right)$$

$$\lg M = \lg e \cdot \ln M \ (\approx 0.43429 \ \ln M)$$

— **기본로그늘같기식**

$$a^{\log_a m} = m$$

$$10^{\lg b} = b$$

$$e^{\ln b} = b$$

[삼각식]

— **부각에 대한 삼각비의 전화공식**

$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta$

— $180^\circ \pm \theta$ **에 대한 삼각비의 전화공식**

$\sin(180^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta, \quad \cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta, \quad \cot(180^\circ \pm \theta) = \pm\cot\theta$

— $90^\circ \pm \theta$ **에 대한 삼각비의 전화공식**

$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos\theta, \quad \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp\sin\theta$

$\tan(90^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta, \quad \cot(90^\circ \pm \theta) = \mp\tan\theta$

— $270^\circ \pm \theta$ **에 대한 삼각비의 전화공식**

$\sin(270^\circ \pm \theta) = -\cos\theta, \quad \cos(270^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta$

$\tan(270^\circ \pm \theta) = \mp\cot\theta, \quad \cot(270^\circ \pm \theta) = \mp\tan\theta$

— $360^\circ \pm \theta$ **에 대한 삼각비의 전화공식**

$\sin(360^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta, \quad \cos(360^\circ \pm \theta) = \cos\theta$

$\tan(360^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta, \quad \cot(360^\circ \pm \theta) = \pm\cot\theta$

— 기본삼각늘갈기식

$\sin\alpha \cdot \cos ec\alpha = 1$, $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\sec^2\alpha$, $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\cos ec^2\alpha$

— 한 삼각비로 표시하는 공식

- $\sin\alpha$ 에 의한 표시

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$

$\cot\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$

- $\cos\alpha$ 에 의한 표시

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, $\tan\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$

- $\tan\alpha$ 에 의한 표시

$\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$

$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

- $\cot\alpha$ 에 의한 표시

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \dfrac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

[삼각식과 그 변형]

— 두 각의 합과 차의 공식

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}, \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

— 합을 적으로 적을 합으로 표시

· 합을 적으로 표시

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

· 적을 합으로 표시

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

— 배각의 공식

· 2배각의 공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

· 3배각의 공식

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

— 반각의 공식

· $\cos\alpha$ 가 들어간 반각의 공식

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

· 반각의 탕겐스공식

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cot\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

— $\sin\alpha$ 와 $\cos\alpha$ 의 제곱공식

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha), \quad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha), \quad \cos^4\alpha = \frac{1}{8}(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$$

$$\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3\alpha)$$

$$\cos^2\alpha\sin\alpha = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \sin 3\alpha)$$

— 3 각형에서 성립하는 늘같기식

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1$$

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

3. 함 수

[비와 비례]

— 비의 기본성질

$$a:b=ca:cb \quad (c\neq 0)$$

$$a:b=\frac{a}{c}:\frac{b}{c} \quad (c\neq 0)$$

— 비례식의 성질

① $a:b=c:d \Rightarrow ad=bc$ (기본성질)

② $a:b=c:d \Rightarrow (a\pm b):b=(c\pm d):d$

③ $a:b=c:d \Rightarrow (a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$

④ $a:b=c:d \Rightarrow (a\pm c):(b\pm d)=c:d$

— 비례분배공식

수 N을 $a:b$의 비로 가르기

$$x=\frac{\mathrm{N}}{a+b}\cdot a,\quad y=\frac{\mathrm{N}}{a+b}\cdot b$$

수 N을 $a:b:c$의 비로 가르기

$$x=\frac{\mathrm{N}}{a+b+c}\cdot a,\quad y=\frac{\mathrm{N}}{a+b+c}\cdot b,\quad z=\frac{\mathrm{N}}{a+b+c}\cdot c$$

— 비와 %와의 관계

$$\left.\begin{array}{l}\text{전체: } \mathrm{A}\cdots 100\%\\ \text{부분: } a\cdots n\%\end{array}\right\}\mathrm{A}:a=100:n\ (\mathrm{A}\times n=100\times a)$$

— **비례와 거꿀비례**

$y=ax$ 또는 $\frac{y}{x}=a$ (a는 비례결수): y는 x에 비례한다.

$y=a\frac{1}{x}$ 또는 $xy=a$ (a는 거꿀비례결수): y는 x에 거꿀비례한다. (여기서 a는 령 아닌 상수)

[함수의 증가와 감소]

함수 $y=f(x)$에서 $x_1<x_2$인 임의의 $x_1,\ x_2\in(a,\ b)$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$이면 함수 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 증가한다. (감소한다.)

[거꿀삼각함수]

$x>0$	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
$\arcsin x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$
$\arccos x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccosec} x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

[삼각함수와 거꿀삼각함수사이의 관계]

① $\arcsin(\sin\alpha)=n\pi+(-1)^n\alpha$

$\arccos(\cos\alpha)=2n\pi\pm\alpha$

$\arctan(\tan\alpha)=n\pi+\alpha$

$\operatorname{arccot}(\cot\alpha)=n\pi+\alpha$

② $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x + \text{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\text{arcsec} x + \text{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$

③ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arctan(-x) = \pi - \arccos x$

$\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot} x$

4. 방정식과 안같기식

[같기식의 성질]

A＝B 일 때

A＋C＝B＋C, A－C＝B－C

AC＝BC(C≠0), $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}(C \neq 0)$

[안같기식의 성질]

A＜B 일 때

A＋C＜B＋C, A－C＜B－C

$m > 0$ 이면 $mA < mB$, $\frac{A}{m} < \frac{B}{m}$

$m < 0$ 이면 $mA > mB$, $\frac{A}{m} > \frac{B}{m}$

[방정식의 풀이]

방정식 $ax = b$ 의 풀이

$a \neq 0$ 일 때 $x = \frac{b}{a}$

$a = 0$ 일 때 $b \neq 0$ 이면 풀이가 없고 $b = 0$ 이면 임의의 수가 풀이로 된다.

방정식 $|ax+b|=c$

$ax+b\geq 0$일 때 $ax+b=c$

$ax+b<0$일 때 $-(ax+b)=c$

[안같기식의 풀이]

$x+a>x+b\ (a>b)$의 풀이는 수전부

$x-a>0\ (<0)$의 풀이는 a보다 큰(작은) 모든 수

$x^2<-1$의 풀이는 없다.

[1차방정식과 1차안같기식]

— **1차방정식** $ax+b=0$

$a\neq 0$이면 풀이모임은 $\mathrm{M}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ (M: 풀이모임)

$a=0,\ b=0$이면 M＝R (R: 실수모임)

$a=0,\ b\neq 0$이면 $\mathrm{M}=\phi$

— **1차안같기식** $ax+b>0$

$a>0$이면 $\mathrm{M}=\left(-\frac{b}{a},\ +\infty\right)$ (M: 풀이모임)

$a<0$이면 $\mathrm{M}=\left(-\infty,\ -\frac{b}{a}\right)$

$a=0,\ b>0$이면 $\mathrm{M}=\mathrm{R}=(-\infty,\ +\infty)$

$a=0,\ b\leq 0$이면 $\mathrm{M}=\phi$

— **련립방정식**

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 의 풀이

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

[2차방정식과 2차안갈기식]

— **2차방정식** $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

판별식 D$=b^2-4ac$ 일 때

D＞0이면

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

또는 $x_1=\dfrac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$ $x_2=\dfrac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$

D＝0이면 겹풀이 $-\dfrac{b}{2a}$

D＜0이면 M＝ϕ (실수모임에서)

・ 몇가지 특수경우

① $x^2+px+q=0,\ \mathrm{D}=p^2-4q$

D＞0이면

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\ ,\quad x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

D＝0이면 겹풀이 $-\dfrac{p}{2}$

② $ax^2+bx=0\ (b\neq 0)$

$x_1=0\ ,\quad x_2=-\dfrac{b}{a}$

③ $ax^2+c=0\ (ac<0)$

$x_1=-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\ ,\quad x_2=\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

· 풀이와 결수사이의 관계(베타의 공식)

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$

· 2차3마디식의 인수분해

D＞0이면 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

D＝0이면 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

— **2차안같기식**

x_1, x_2 이 2차방정식의 풀이$(x_1<x_2)$일 때

① $ax^2+bx+c>0$

D＞0, $a>0$ 이면 $M=(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

D＞0, $a<0$ 이면 $M=(x_1,\ x_2)$

D＝0, $a>0$ 이면 $M=R\setminus\{x_1\}$

D＝0, $a<0$ 이면 $M=\ \phi$

D＜0, $a>0$ 이면 $M=(-\infty,\ +\infty)$

D＜0, $a<0$ 이면 $M=\ \phi$

② $ax^2+bx+c\geq 0$

D＞0, $a>0$ 이면 $M=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$

D＞0, $a<0$ 이면 $M=[x_1,\ x_2]$

D＝0, $a>0$ 이면 $M=(-\infty,\ +\infty)$

D＝0, $a<0$ 이면 $M=\{x_1\}$

D＜0, $a>0$ 이면 $M=(-\infty,\ +\infty)$

D＜0, $a<0$ 이면 $M=\ \phi$

· 몇가지 특수한 경우

① $x^2-\alpha^2>0$, $M=(-\infty,\ -|\alpha|)\cup(|\alpha|,\ +\infty)$

② $x^2-\alpha^2\geq 0$, $M=(-\infty,\ -|\alpha|]\cup[|\alpha|,\ +\infty)$

③ $x^2-\alpha^2<0$, $M=(-|\alpha|,\ |\alpha|)$

④ $x^2-\alpha^2\leq 0$, $M=[-|\alpha|,\ |\alpha|]$

⑤ $x^2+\alpha^2>0$, $(\alpha\neq 0)$, $M=(-\infty,\ +\infty)$

⑥ $x^2+\alpha^2\geq 0$, $\mathrm{M}=(-\infty,\ +\infty)$

⑦ $x^2+\alpha^2<0$, $\mathrm{M}=\phi$

⑧ $x^2+\alpha^2\leq 0$, $(\alpha\neq 0)$, $\mathrm{M}=\phi$

[지수방정식과 지수안같기식]

— **지수방정식** $a^x=b(a>0,\ a\neq 1)$

$b>0$ 이면 $x=\log_a b$

$b<0$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

— **지수안같기식** $a^x<b$

$b>0,\ a>1$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ \log_a b)$

$b>0,\ 0<a<1$ 이면 $\mathrm{M}=(\log_a b,\ +\infty)$

$b\leq 0$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

$a^x>b$ 인 경우

$b>0,\ a>1$ 이면 $\mathrm{M}=(\log_a b,\ +\infty)$

$b>0,\ 0<a<1$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ \log_a b)$

$b<0$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ +\infty)$

[로그방정식과 로그안같기식]

— **로그방정식**

$\log_a x=b\ (a>0,\ a\neq 1)$

$x=a^b$

— **로그안같기식**

① $\log_a x<b$

$a>1$ 이면 $\mathrm{M}=(0,\ a^b)$

$0<a<1$ 이면 $\mathrm{M}=(a^b,\ +\infty)$

② $\log_a x>b$

$a>1$ 이면 $\mathrm{M}=(a^b,\ +\infty)$

$0<a<1$ 이면 $\mathrm{M}=(0,\ a^b)$

[삼각방정식과 삼각안같기식]

ㅡ 삼각방정식

- $\sin x = a \ (|a| \le 1)$

  $M = \{x \mid x = (-1)^{K} \arcsin a + K\pi, \quad K \in Z\}$

  특수경우

  $\sin x = 0$

  $M = \{x \mid x = K\pi, \quad K \in Z\}$

  $\sin x = 1$

  $$M = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi, \quad K \in Z\right\}$$

  $\sin x = -1$

  $$M = \left\{x \mid x = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi, \quad K \in Z\right\}$$

- $\cos x = a \ (|a| \le 1)$

  $M = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2K\pi, \quad K \in Z\}$

  특수경우

  $\cos x = 0$

  $$M = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + K\pi, \quad K \in Z\right\}$$

  $\cos x = 1$

  $M = \{x \mid x = 2K\pi, \quad K \in Z\}$

  $\cos x = -1$

  $M = \{x \mid x = \pi + 2K\pi, \quad K \in Z\}$

- $\tan x = a$

  $M = \{x \mid x = \arctan a + K\pi, \quad K \in Z\}$

  특수경우

  $\tan x = 0$

  $M = \{x \mid x = K\pi, \quad K \in Z\}$

  $\tan x = 1$

$$M=\left\{x|x=\frac{\pi}{4}+K\pi,\ K\in Z\right\}$$

$\tan x=-1$

$$M=\left\{x|x=-\frac{\pi}{4}+K\pi,\ K\in Z\right\}$$

- $\cot x=a$

$M=\{x|x=\text{arccot}a+K\pi, K\in Z\}$

특수경우

$\cot x=0$

$$M=\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+K\pi,\quad K\in Z\right\}$$

$\cot x=1$

$$M=\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{4}+K\pi,\quad K\in Z\right\}$$

$\cot x=-1$

$$M=\left\{x\,|\,x=-\frac{\pi}{4}+K\pi,\quad K\in Z\right\}$$

— **삼각안같기식**

- $\sin x< a$

$-1< a\le 1$ 이면

$M=\{x|-\arcsin a+2K\pi< x<\arcsin a+ 2K\pi, K\in Z\}$

$a>1$ 이면 $M=(-\infty,\ +\infty)$

$a\le -1$ 이면 $M=\phi$

- $\sin x> a$

$-1\le a<1$ 이면

$M=\{x|\arcsin a+2K\pi< x<\pi-\arcsin a+ 2K\pi,\ K\in Z\}$

$a<-1$ 이면 $M=(-\infty,\ +\infty)$

$a\ge 1$ 이면 $M=\phi$

- $\cos x < a$

  $-1 < a \leq 1$ 이면

  $\mathrm{M}=\{x|\operatorname{arccos} a+2k\pi < x < 2\pi-\operatorname{arccos} a+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$

  $a > 1$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ +\infty)$

  $a \leq -1$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

- $\cos x > a$

  $-1 \leq a < 1$ 이면

  $\mathrm{M}=\{x|-\operatorname{arccos} a+2k\pi < x < \operatorname{arccos} a+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$

  $a < -1$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ +\infty)$

  $a \geq 1$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

- $\tan x < a$

  $\mathrm{M}=\left\{x|-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \arctan a+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right\}$

- $\tan x > a$

  $\mathrm{M}=\left\{x|\arctan a+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\right\}$

- $\cot x < a$

  $\mathrm{M}=\{x|\operatorname{arccot} a+k\pi < x < \pi+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$

- $\cot x > a$

  $\mathrm{M}=\{x|k\pi < x < \operatorname{arccot} a+k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$

[절대값을 포함하는 간단한 방정식과 안같기식]

— **방정식** $|x-a|=b$

$b > 0$ 이면 $\mathrm{M}=\{a-b,\ a+b\}$

$b = 0$ 이면 $\mathrm{M}=\{a\}$

$b < 0$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

— **안같기식**

① $|x-a| < b$

$b > 0$ 이면 $\mathrm{M}=(a-b,\ a+b)$

$b \leq 0$ 이면 $\mathrm{M}=\phi$

② $|x-a|>b$

$b>0$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ a-b)\cup(a+b,\ +\infty)$

$b=0$ 이면 $\mathrm{M}=\mathrm{R}\setminus\{a\}$

$b<0$ 이면 $\mathrm{M}=(-\infty,\ +\infty)$

5. 평면도형

[3각형]

— **정점 A에서 그은 가운데선의 길이**

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

— **정점 A에서 내린 높이**

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}\quad\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

— **정점 A에서 그은 아낙각의 2등분선의 길이**

$$\ell=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$$

— **면적**

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

（h_a, h_b, h_c： 점 A, B, C에서 내린 높이）

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\mathrm{S}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ （헤론의 공식）

$$\mathrm{S}=\frac{abc}{4\mathrm{R}}$$ （R： 외접원의 반경）

$$\mathrm{S}=pr$$ （r： 내접원의 반경）

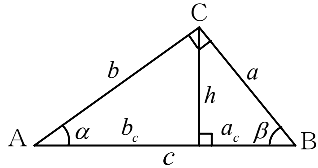
— 직3각형에서 피다고라스의 정리

$a^2+b^2=c^2$

※ $b^2=b_c\cdot c$

$a^2=a_c\cdot c$

$h^2=a_c\cdot b_c$



— 직3각형에서 변과 각사이의 관계

$a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\sin\beta$

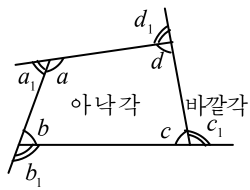
$a=c\cdot\cos\beta$, $b=c\cdot\cos\alpha$

$a=b\cdot\tan\alpha$, $b=a\cdot\tan\beta$

$a=b\cdot\cot\beta$, $b=a\cdot\cot\alpha$

[4각형]

— 4각형의 아낙각의 합, 바깥각의 합



$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d=360^\circ$

$\angle a_1+\angle b_1+\angle c_1+\angle d_1=360^\circ$

— 다각형의 아낙각의 합, 바깥각의 합

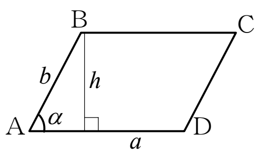
n각형의 아낙각의 합$=180^\circ(n-2)$

n각형의 바깥각의 합$=360^\circ$

— 평행4변형의 대각선의 성질

$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=2(a^2+b^2)$

— 평행4변형의 면적



$\mathrm{S}=ah$

$\mathrm{S}=ab\sin\alpha$

— 등변4각형의 면적

$\mathrm{S}=ah$ (a: 밑변, h: 높이)

$\mathrm{S}=a^2\sin\alpha$

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

— **직4각형의 대각선의 길이**

$d=\sqrt{a^2+b^2}$

— **직4각형의 면적**

$\mathrm{S}=ab$

— **바른4각형의 대각선의 길이**

$d=\sqrt{2}a$

— **바른4각형의 면적**

$\mathrm{S}=a^2=\frac{1}{2}d^2$

— **제형의 중간선**

$\mathrm{EF}=\frac{1}{2}(a+b)$ (a, b: 두 밑변, EF: 중간선)

— **제형의 면적**

$\mathrm{S}=\frac{a+b}{2}\cdot h$ (h: 두 밑변사이의 높이)

[원]

— **원둘레의 길이와 원의 면적**

$\ell=2\pi r$, $\mathrm{S}=\pi r^2$

— **활등의 길이와 중심각사이의 관계**

한 원에서 활등의 길이는 중심각에 비례한다.

$\ell=k\alpha$ (k: 비례결수, α: 중심각)

$\ell=\frac{\pi r}{180}\alpha$ (활등의 길이공식)

— **부채형의 면적과 중심각사이의 관계**

한 원에서 부채형의 면적은 중심각에 비례한다.

$\mathrm{S}_{부}=k\alpha$ (k: 비례결수, α: 중심각)

$\mathrm{S}_{부}=\frac{\pi r^2}{360}\alpha$ (부채형의 면적공식)

[평면에서 두 점사이의 거리]

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

[직선에서 선분의 나누기]

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

[평면에서 선분의 나누기]

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

[선분의 가운데점의 자리표]

— 직선에서 선분의 가운데점의 자리표

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

— 평면에서 선분의 가운데점의 자리표

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

[직3각형의 요소들사이의 관계식]

$$a=c\sin\mathrm{A}=c\cos\mathrm{B}$$
$$a=b\tan\mathrm{A}=b\cot\mathrm{B}$$

(a, b : 직각변, c : 빗변; A, B: a와 b에 대응하는 각)

[일반3각형의 요소들사이의 기본관계식]

— 시누스공식

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}=\frac{c}{\sin\mathrm{C}}=2\mathrm{R}$$ (R: 외접원의 반경)

— 코시누스공식

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\mathrm{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$$

— 탕겐스공식

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}$$

— 기타 관계식

$$\sin(B+C)=\sin A, \quad \cos(B+C)=-\cos A$$

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}, \quad \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}\left(\text{여기서 } p=\frac{a+b+c}{2},\ r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\right)$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

6. 자리표변환

[직각자리표와 극자리표사이의 관계]

$$x=\rho\cos\varphi$$

$$y=\rho\sin\varphi$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

[평행이동]

$$\begin{cases} x=x^1+a \\ y=y^1+b \end{cases}, \quad \begin{cases} x^1=x-a \\ y^1=y-b \end{cases}$$

[회전이동]

$$\begin{cases} x=x^1\cos\alpha-y^1\sin\alpha \\ y=x^1\sin\alpha+y^1\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1=x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y^1=-x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

[평행이동과 회전이동]

$$\begin{cases} x = x^1\cos\alpha - y^1\sin\alpha + a \\ y = x^1\sin\alpha + y^1\cos\alpha + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1 = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y^1 = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

7. 공간도형

[바른다면체]

— **바른다면체의 종류**

① 바른4면체(한 면이 바른3각형: $m=4,\ n=6,\ p=4$)

② 바른6면체(한 면이 바른4각형: $m=8,\ n=12,\ p=6$)

③ 바른8면체(한 면이 바른3각형: $m=6,\ n=12,\ p=8$)

④ 바른12면체(한 면이 바른5각형: $m=20,\ n=30,\ p=12$)

⑤ 바른20면체(한 면이 바른3각형: $m=12,\ n=30,\ p=20$)

— **바른4면체의 겉면적과 체적**

$$\mathrm{S}=\sqrt{3}a^2,\quad \mathrm{V}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

— **바른6면체의 겉면적과 체적**

$$\mathrm{S}=6a^2,\quad \mathrm{V}=a^3$$

— **바른8면체의 겉면적과 체적**

$$\mathrm{S}=2\sqrt{3}a^2,\quad \mathrm{V}=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$ (a: 다면체의 모서리의 길이)

[직각기둥]

— **옆면적**

$\mathrm{S}_{\text{옆}}=h\ell$ (ℓ: 밑면의 둘레의 길이, h: 높이)

— **체적**

$\mathrm{V}=\mathrm{S}h$ (S: 밑면적, h: 높이)

[각뿔]

— **바른각뿔의 옆면적**

$S=\frac{1}{2}ahn=\frac{1}{2}\ell h$ (a : 밑면의 한 변, n : 옆면의 개수, h : 옆면의 높이, ℓ : 밑면의 둘레)

— **각뿔의 체적**

$V=\frac{1}{3}SH$ (S: 밑면적, H: 각뿔의 높이)

[각뿔대]

— **바른각뿔대의 옆면적**

$S=\frac{1}{2}(a+b)n\cdot h$ (a, b : 아래 웃밑면의 한 변, h : 옆면의 높이, n : 옆면의 개수)

— **각뿔대의 체적**

$V=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$

(S_1, S_2 : 두 밑면의 면적, H: 각뿔대의 높이)

[원기둥]

— **옆면적**

$S=2\pi rh$ (r: 밑면의 반경, h: 원기둥의 높이)

— **겉면적**

$S=2\pi R(R+h)$

— **체적**

$V=\pi R^2h$

[원뿔]

— **옆면적**

$S=\pi R\ell$ (ℓ : 모선의 길이, R: 밑면의 반경)

— **겉면적**

$S=\pi R(\ell+R)$

— **체적**

$V=\frac{1}{3}SH$ (S: 밑면의 면적, H: 원뿔의 높이)

[원뿔대]

— **옆면적**

$S = \pi\ell(R + r)$ (ℓ : 모선의 길이, R, r : 아래, 웃 밑면의 반경)

— **겉면적**

$S = \pi[(R + r)\ell + R^2 + r^2]$

— **체적**

$V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)H$ (H： 원뿔대의 높이)

[구]

— **겉면적**

$S = 4\pi R^2$

— **체적**

$S = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R： 구의 반경)

— **구면부채의 겉면적**

$S = \pi R(2h + a)$ (h： 결구의 높이, a： 결구의 밑면의 반경)

— **구면부채의 체적**

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

— **결구의 겉면적**

$S = \pi(2Rh + a^2)$ (a： 밑면의 반경)

— **결구의 체적**

$V = \pi R^2 (R - \frac{1}{3}h)$

— **구대의 겉면적**

$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$ (a, b： 두 밑면의 반경)

— **구대의 옆면적**

$S = 2\pi Rh$ (h： 구대의 높이)

— **구대의 체적**

$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$

[오일레르의 특성수공식]

다면체에서 정점수를 m, 모서리수를 n, 면수를 p 라고 할 때

$$m-n+p=2$$

[씸프슨의 만능체적공식]

각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔, 각뿔대, 원뿔대에서 아래밑면적을 S_1, 웃밑면적을 S_2, 중간면(높이의 가운데점을 지나며 밑면에 평행인 면)의 면적을 S_0, 높이를 H로 표시하면 체적 V는

$$V=\frac{1}{6}H(S_1+4S_0+S_2)$$ (각뿔, 원뿔인 경우 $S_2=0$)

[공간에서 두 점사이의 거리]

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

[공간에서 선분의 나누기]

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

[공간에서 선분의 가운데점의 자리표]

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

8. 모임과 명제

[모임산법법칙]

$A\cup A=A$, $A\cap A=A$

$A\cup\phi=A$, $A\cap\phi=\phi$

$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$(바꿈법칙)

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(묶음법칙)

$A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$(분배법칙)

[모임의 덜기(차)]

$A \backslash A = \phi$

$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$

$A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$

$A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$

[나머지모임]

$\overline{A} = S \backslash A$ (S: 전체모임, $A \subset S$)

$\overline{\overline{A}} = A$

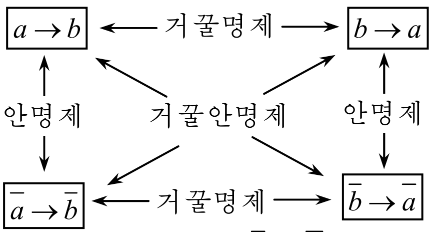
$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

[쌍대법칙]

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

[명제들사이의 관계]



명제 $p \to q$: 옳은 명제 $\Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$: 옳은 명제

※ 정리 $p \to q$ 에서 $p : q$ 가 성립하기 위한 충분조건

$q : p$ 의 필요조건

[수학적귀납법]

$n \in \mathrm{N}$ 에 관계되는 명제 $p(n)$ 에서

- $p(1)$ 이 옳다.
- $p(k)$ 가 옳다면 $p(k+1)$ 도 옳다.

가 증명되면 임의의 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 이 옳다.

9. 도형의 방정식

[벡토르의 선형산법]

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

[두 벡토르의 스칼라적]

— **사영의 성질**

$$\vec{P}_\ell(\lambda\vec{a})=\lambda\vec{P}_\ell(\vec{a})$$

$$P_\ell(\lambda\vec{a})=\lambda P_\ell(\vec{a})$$

$$\vec{P}_\ell(\vec{a}+\vec{b})=\vec{P}_\ell(\vec{a})+\vec{P}_\ell(\vec{b})$$

$$P_\ell(\vec{a}+\vec{b})=P_\ell(\vec{a})+P_\ell(\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,p_{\vec{a}}(\vec{b})=|\vec{b}|\,p_{\vec{b}}(\vec{a})$$

($\vec{p}_\ell$： ℓ 축에 대한 사영, p_ℓ： ℓ 축에 대한 사영값)

— **스칼라적의 성질**

$$\vec{a}(\vec{b}_1+\vec{b}_2)=\vec{a}\vec{b}_1+\vec{a}\vec{b}_2$$

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\vec{b})$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\vec{a}}$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

$\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0$ 일 때 $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

– 스칼라적의 자리표에 의한 표시

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

[두 벡토르의 벡토르적]

– 벡토르적의 성질

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \overleftarrow{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

– 벡토르적의 자리표에 의한 표시

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{a_2 b_3 - a_3 b_2,\ \ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ \ a_1 b_2 - a_2 b_1\}$$

또는

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

– 평행4변형의 면적

$$\mathrm{S} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

– 3각형의 면적

$$\mathrm{S}_{\Delta} = \frac{\mathrm{S}_{\square}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

[세 벡토르의 혼합적]

– 혼합적의 성질

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

— **혼합적의 자리표에 의한 표시**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

또는

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

— **평행6면체의 체적**

$$\mathrm{V}_6=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|$$

— **4면체의 체적**

$$\mathrm{V}_4=\frac{1}{6}\mathrm{V}_6=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|$$

[평면에서의 직선]

— **직선의 일반방정식**

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

— **단편으로 표시된 직선의 방정식**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

— **직선의 표준방정식(1)**

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

(α: 직선에 내린 수직선과 Ox 축이 이루는 각,
p: 자리표원점으로부터 직선까지의 거리)

※ 직선의 일반방정식을 표준형태로의 표시

$$\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=0$$

— 직선의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x = x_0 + nt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (M_0(x_0,\ y_0),\ \vec{a} = \{n,\ m\})$$

— 직선의 표준방정식(2)

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m}$$

— 두 점을 지나는 직선의 방정식

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{또는} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{또는} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

— 방향결수에 의한 직선의 방정식

$$y - y_0 = K(x - x_0)$$

$$\text{또는} \quad y = Kx + b \quad \left(K = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$$

— 점으로부터 직선까지의 거리

$$d = | x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p |$$

$$\text{또는} \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

두 직선사이의 각

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1K_2}$$

— 두 평행직선사이의 거리

$$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

[공간에서의 직선]

— 직선의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \quad (M_0(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \vec{a}=\{\ell,\ m,\ n\})$$

— 직선의 표준방정식

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

두 점을 지나는 직선의 방정식

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

— 두 평행직선사이의 거리

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

— 두 직선사이의 각

$$\cos\varphi=\frac{\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

[평면의 방정식]

— 평면의 일반방정식

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— 단편으로 표시된 평면의 방정식

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

— **평면의 표준방정식**

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

(α, β, γ : 자리표축과 평면의 법선벡토르가 이루는 각,
p : 자리표원점으로부터 평면까지의 거리)

※ 평면의 일반방정식을 표준방정식으로의 표시

$$\frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}} = 0$$

— **점과 법선벡토르로 표시된 평면의 방정식**

$$\mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + \mathrm{C}(z - z_0) = 0$$

— **점과 공선이 아닌 두 벡토르로 표시된 평면의 방정식**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

— **세 점을 지나는 평면의 방정식**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

— **평면의 보조변수방정식**

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell_1 u + \ell_2 v \\ y = y_0 + m_1 u + m_2 v \\ z = z_0 + n_1 u + n_2 v \end{cases}$$

— **두 평행직선을 지나는 평면의 방정식**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

— **사귀는 두 직선을 지나는 평면의 방정식**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

[점으로부터 평면까지의 거리]

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

[두 평면사이의 각]

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

[원둘레]

— 원둘레의 표준방정식

$$x^2+y^2=R^2$$

— 원둘레의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$$

— 점 $C(a, b)$에 중심을 가진 원둘레의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

[타원]

— 타원의 표준방정식

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

— 타원의 리심률

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

—타원의 초점반경

$$r_1=a+\varepsilon x, \quad r_2=a-\varepsilon x$$

—타원의 기준선방정식

$$x=-\frac{a}{\varepsilon}, \; x=\frac{a}{\varepsilon}$$

— 임의의 점에서의 접선의 방정식

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

— 임의의 점에서의 법선의 방정식

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

— 타원의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

— 타원의 극방정식

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

— 타원의 면적

$$\mathrm{S}=\pi ab$$

[쌍곡선]

— 쌍곡선의 표준방정식

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

— 쌍곡선의 리심률

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$$

— 쌍곡선의 초점반경

오른쪽가지에서

$$r_1=\varepsilon x+a\,,\quad r_2=\varepsilon x-a$$

왼쪽가지에서

$$r_1=-(\varepsilon x+a)\,,\quad r_2=-(\varepsilon x-a)$$

— 쌍곡선의 기준선방정식

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\quad x=\frac{a}{\varepsilon}$$

— 임의의 점에서 접선의 방정식

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

— 임의의 점에서 법선의 방정식

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

— 점근선의 방정식

$$y=\frac{b}{a}x,\ \ y=-\frac{b}{a}x$$

— 쌍곡선의 극방정식

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

[포물선]

— 포물선의 표준방정식

$$y^2=2px$$

— 포물선의 초점반경

$$r=x+\frac{p}{2}$$

— 임의의 점에서 접선의 방정식

$$yy_0=p(x+x_0)$$

— 임의의 점에서 법선의 방정식

$$y-y_0=\frac{y_0}{p}(x-x_0)$$

— 포물선의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p} \\ y=t \end{cases}$$

— 포물선의 극방정식

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$$

10. 순열과 조합

[순열의 총수공식]

총수를 P_n^k (또는 A_n^k) 로 표시)

$$\mathrm{P}_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k\text{개}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\mathrm{P}_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$(0!=1)$ 로 약속

[조합의 총수공식]

총수를 C_n^k (또는 $\binom{k}{n}$) 로 표시)

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{P}_n^k}{\mathrm{P}_k^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

또는 $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{P}_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

— **조합의 성질**

$\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}\ (0 \le k \le n)$

$\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}\ (0 \le k < n)$

$\mathrm{C}_n^0 = \mathrm{C}_n^n = 1$

$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$

[뉴톤의 2마디공식]

— **뉴톤의 2마디공식**

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

....

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots +$$
$$+ C_n^m a^{n-m}b^m + \cdots + C_n^n b^n \ (n \in \mathrm{N})$$

일반마디： $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

・ 파스칼3각형

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

....

11. 수 렬

[같은차수렬]

(a_n)： 같은차수렬 ⇔ $a_{n+1} - a_n = d$ （d： 공통차）

— **일반마디공식**

$a_n = a_1 + (n-1)d$

이웃한 세 마디 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 사이의 관계

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} (n \geq 2)$$

— **합공식**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{또는} \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

[같은비수렬]

(a_n)： 같은비수렬 $\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ （q： 공통비）

— **일반마디공식**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

이웃한 세 마디 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 사이의 관계

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

— **합공식**

$$\mathrm{S}_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1) \\ na_1 \qquad (q = 1) \end{cases}$$

— **무한감소같은비수렬의 합** $(|q| < 1)$

$$\mathrm{S}_n = \frac{a_1}{1-q}$$

[몇가지 간단한 수렬의 합]

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1\cdot 4+2\cdot 7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$$

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

[합기호 $(\sum)$의 성질]

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

※ $\sum_{k=1}^{n}c=nc$ 특히 $\sum_{k=1}^{n}1=n$

12. 행렬식

[행렬의 선형산법]

$$\mathrm{A}+\mathrm{O}=\mathrm{A}$$

$$\mathrm{A}+(-\mathrm{A})=\mathrm{O}$$

$$1\cdot\mathrm{A}=\mathrm{A}$$

$$(\lambda+\mu)\mathrm{A}=\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{A}$$

$$\lambda(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\lambda\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}$$

$$\lambda(\mu\mathrm{A})=(\lambda\mu)\mathrm{A}$$

[행렬의 성질]

$(AB)C = A(BC)$ (묶음법칙)

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$ (분배법칙)

$(kA)B = k(AB)$ (k 는 상수)

$|AB| = |A| \cdot |B|$

[3차행렬식과 련립방정식](크라메르의 공식)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \neq 0 \text{ 이면}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ 의 풀이는}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

13. 도함수

[극한]

— **수렬의 극한의 성질**

수렬 (a_n), (b_n) 이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n \text{ (}c\text{ 는 상수)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$$

— **함수의 극한의 성질**

$x \to a$ 일 때 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 수렴하면

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) \ (c \text{ 는 상수})$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

— **몇가지 특수한 극한들**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(e=2.718281828…)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\ln m}{m} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0), \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

[도함수와 미분]

— **도함수**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

— 미분

$dy = f'(x)dx$

— 미분법의 규칙

$[cf(x)]' = cf'(x)$ (c 는 상수)

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

— 합성함수의 도함수

$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]f'(x)$

— 거꿀함수의 도함수

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

— 기본초등함수의 도함수

$c' = 0$ (c: 상수), $x' = 1$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in$ Q), $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

— **함수의 증가, 감소구간의 판정법**

어떤 구간에서

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x):$ 이 구간에서 증가

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x):$ 이 구간에서 감소

※ $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x):$ 이 구간에서 상수

— **함수의 극대, 극소판정조건**

점 a를 포함한 충분히 작은 구간에서

① $\left.\begin{array}{l} x < a \text{에서 } f'(x) > 0 \\ x > a \text{에서 } f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 점 $x = a : f(x)$의 극대점

② $\left.\begin{array}{l} x < a \text{에서 } f'(x) < 0 \\ x > a \text{에서 } f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 점 $x = a : f(x)$의 극소점

— **함수값의 근사계산공식**

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$$

$$a = 0 \Rightarrow f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0) \cdot \Delta x$$

$$(x + \Delta x)^{\alpha} \approx x^{\alpha} + \alpha x^{\alpha - 1} \cdot \Delta x$$

$$x = 1 \Rightarrow (1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha \Delta x$$

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

$$x = 0 \Rightarrow \sin \Delta x \approx \Delta x$$

— **몇가지 함수에 대한 고계도함수**

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

— 보조변수로 표시된 함수의 도함수

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (a < t < b) \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

14. 적분법

[부정적분]

— 부정적분

$$\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + c \quad (\mathrm{F}'(x) = f(x))$$

— 기본성질

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int \mathrm{F}'(x)dx = \mathrm{F}(x) + c$$

$$\int d\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x) + c$$

— 변수치환적분

① $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = \mathrm{F}(u) + c = \mathrm{F}(u(x))$

② $\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$

$$= \mathrm{F}(t) + c = \mathrm{F}(\varphi^{-1}(x)) + c \quad (x = \varphi(t))$$

— 부분적분

$$\int udv = uv - \int vdu$$

— **부정적분공식**

$$\int 0dx = c\,, \quad \int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c\,, \quad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c \ (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \ (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c\,, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln|x^2+\alpha| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + c$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \sqrt{x^2+\alpha} + c$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} - \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c\,,\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c\,,\quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c\,,\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c\,,\quad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{\mathrm{A}}{x-\alpha} dx = \mathrm{A}\ln|x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int xe^{\alpha x} dx = \frac{\alpha x - 1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\int \log_a x dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + c$$

$$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c\,,\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{1 \pm \sin x} = \tan\left(\frac{x}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) + c\ , \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \tan\frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\cot\frac{x}{2} + c\ , \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

— 점화공식

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

[정적분]

— 적분학의 기본공식(뉴톤-라이브니쯔의 공식)

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

— 정적분의 성질

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

— 평균값공식

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$ (μ : 함수의 평균값)

f 가 련속이면

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

— **치환적분**

적분 $\int_a^b t(x)dx$ 에서 변수 x 를 $x=\varphi(t)$ 인 변수 t 로 치환하면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \ (\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b)$$

— **부분적분**

$$\int_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b-\int_a^b vu'dx$$

[적분의 응용]

— **곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=a,\ x=b$ 및 x 축으로 둘러싸인 면적계산공식**

- 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=a,\ x=b$ 및 x 축으로 둘러싸인 곡선제형의 면적

$$\mathrm{S}=\int_a^b |f(x)|dx$$

- 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x)\ge g(x)$ 일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 도형의 면적

$$\mathrm{S}=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

— **극자리표로 표시된 곡선부채형의 면적**

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

— **가로자름면의 면적으로 표시된 도형의 체적**

$$\mathrm{V}=\int_a^b \mathrm{S}(x)dx$$

— **곡선제형의 회전에 의하여 얻어진 도형의 체적**

· $\mathrm{O}x$ 축 둘레로의 회전인 경우

$$\mathrm{V}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

· $\mathrm{O}y$ 축 둘레로의 회전인 경우

$$\mathrm{V}=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

— **곡선의 길이**

· 곡선의 방정식이 $y=f(x),\ a\le x\le b$ 로 주어진 경우

$$\mathrm{S}=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

· 보조변수로 주어진 경우

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad (\alpha\le t\le\beta) \end{cases}$$

$$\mathrm{S}=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

· 극자리표로 주어진 경우

$r=r(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta$

$$\mathrm{S}=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

— **곡선 $y=f(x),\ a\le x\le b$ 의 $\mathrm{O}x$ 축 둘레로의 회전에 의하여 얻어진 도형의 겉면적**

$$\mathrm{S}=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

— **곡선 $y=f(x),\ a\le x\le b$ 의 질량중심($\rho=\rho(x)$:곡선의 밀도)**

· 질량

$$m=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

· 질량중심의 자리표

$$x=\frac{M_y}{m},\quad y=\frac{M_x}{m}$$

— **곡선제형의 질량중심**

· 질량

$$m=\rho\int_a^b f(x)dx\quad (\rho:\text{상수})$$

· 질량중심의 자리표

$$x=\frac{M_y}{m},\quad y=\frac{M_x}{m}$$

— **물체의 변위와 지나간 거리계산공식**

· 물체의 변위

$$P=\int_{t_0}^{T} v(t)dt$$

· 지나간 거리

$$S=\int_{t_0}^{T} |v(t)|\,dt$$

— **일계산공식**

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

수학기호

기호	기호의 뜻(이름)	례
$=$	같다.	$a=b$
$\equiv$	늘 같다.	$\mathrm{A}\equiv\mathrm{B}$
	또는 합동	$\Delta\mathrm{ABC}\equiv\Delta\mathrm{A_1B_1C_1}$
$\neq$	같지 않다.	$a\neq b$
$\approx$	근사하게 같다.	$a\approx b$
$\in$	들기	$a\in\mathrm{A}$
$\notin$	안들기	$a\notin\mathrm{A}$
$\ni$	가지기	$\mathrm{A}\ni a$
$\not\ni$	안가지기	$\mathrm{A}\not\ni a$
$\subseteq$	품기기(부분모임)	$\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$
$\not\subseteq$	안품기기	$\mathrm{A}\not\subseteq\mathrm{B}$
$\supseteq$	품기	$\mathrm{A}\supseteq\mathrm{B}$
$\not\supseteq$	안품기	$\mathrm{A}\not\supseteq\mathrm{B}$
$\supset$	참부분모임	$\mathrm{A}\supset\mathrm{B}$
ϕ	빈모임	$\mathrm{A}\cup\phi=\mathrm{A}$
$\{\ \}$	모임	$\{a,\ b,\ \cdots\}$
$\cup$	모임의 합	$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$
$\cap$	모임의 적(사귐)	$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$
$\backslash$	모임의 차	$\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$
$>$	보다 크다.	$a>b$
$<$	보다 작다.	$a<b$
$\geqslant$	보다 작지 않다.	$a\geqslant b$
$\leqslant$	보다 크지 않다.	$a\leqslant b$
$(\ )$	최대공통약수	$(4,\ 8)=4$
$[\ ]$	최소공통배수	$[4,\ 8]=8$
$\mid$	완제된다.	$4\mid 16$
$\mid\ \mid$	절대값	$\lvert -2\rvert=2$

기호	기호의 뜻(이름)	례
$\sqrt{\ }$	$\frac{1}{2}$ 제곱	$\sqrt{5}$
$\sqrt[n]{\ }$	$\frac{1}{n}$ 제곱	$\sqrt[n]{a}$
$\log_a$	a를 밑수로 하는 로그	$\log_2 32=5$
lg	상용로그(10을 밑수로 하는 로그)	$\lg 1000=3$
ln	자연로그(e를 밑수로 하는 로그)	$\ln e=1$
!	차례곱	$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$
$f(\ )$	함수의 표시	$y=f(x)$
$\therefore$	그러므로, 따라서	$\therefore\ a=b$
$\because$	왜냐하면	$\because\ a\in A$
$\angle$	각	$\angle AOB$
∟	직각표시	
°, ′, ″	도, 분, 초	25°, 10′, 0″
⌒	활등	$\overset{\frown}{AB}$
$/\!/$	평행	$AB /\!/ CD$
$\underline{/\!/}$	평행이며 같다.	$AB \underline{/\!/} CD$
$\perp$	수직	$AB\perp CD$
$\triangle$	3각형	$\triangle ABC$
▱	평행4변형	▱ABCD
S	면적	$S_\Delta=\frac{1}{2}ah$
V	체적	$V_{원기둥}=\pi R^2 H$
$\backsim$	닮음	$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$
sin	시누스	$\sin\alpha$
cos	코시누스	$\cos\alpha$
tan	탕겐스	$\tan\alpha$

기호	기호의 뜻(이름)	례
cot	코탕겐스	$\cot\alpha$
sec	세칸스	$\sec\alpha$
arcsin	아크시누스	$\arcsin\frac{1}{2}$
arccos	아크코시누스	$\arccos\frac{1}{2}$
arctan	아크탕겐스	$\arctan\frac{1}{2}$
arccot	아크코탕겐스	$\mathrm{arccot}\frac{1}{2}$
[ ]	닫긴구간	$[a,\ b]$
[ )	한쪽열린구간	$[a,\ b)$
( )	열린구간	$(a,\ b)$
P_n^k	n개의 원소에서 k개 취한 순렬	$\mathrm{P}_3^2=3\cdot2=6$
C_n^k	n개의 원소에서 k개 취한 조합	$\mathrm{C}_3^2=\frac{\mathrm{P}_3^2}{\mathrm{P}_2}=\frac{6}{2}=3$
P_n	n개의 원소에서 n개 다 취한 순렬(치환)	$\mathrm{P}_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
Σ	합	$\sum_{k=1}^{n}k$
%	퍼센트	2%
i	허수단위	$2+3i$
$\lvert\ \rvert$, det	행렬식	$\lvert\mathrm{A}\rvert$
$\sim$	상반행렬	$\tilde{\mathrm{A}}$
$'$	전위행렬	A'
-1	거꿀행렬	A^{-1}
E	단위행렬	E
$\rightarrow$	벡토르	$\vec{a}$
$\lvert\ \rvert$	벡토르의 길이	$\lvert\vec{a}\rvert$
$\cdot$	벡토르의 스칼라적	$\vec{a}\cdot\vec{b}$

기호	기호의 뜻(이름)	례
$\forall$	모두기호(임의의)	$\forall x$
$\exists$	있음기호(있다, 있어서)	$\exists x$
$\wedge$	명제의 적(이고)	$A \wedge B$
$\vee$	명제의 합(또는)	$A \vee B$
$-$	부정(아니다), 나머지모임	$\overline{A}$
$\Rightarrow$, $\rightarrow$	명제의 따름(이면)	$A \rightarrow B$
$\rightarrow$	다가가다	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
∞	무한대	$(-\infty, +\infty)$
$\triangle$	증분	Δx
$\dfrac{d}{dx}$, $'$	도함수	$\dfrac{df}{dx}$, $(\sin x)'$
d	미분	$d(\sin x)$
$\int$	부정적분	$\int f(x)dx$
$\int\limits_a^b$	정적분	$\int\limits_a^b f(x)dx$

수학의 발견, 발명년대표

년대	수학자와 발견, 발명내용
	△ **수학의 발생단계**
30만년전	수의 개념형성
B. C. 4700	바빌로니아에서 1년을 365일로 하는 태양력 사용
B. C. 3500	메소포타미아에서 바른6각형, 같은차수렬, 같은비수렬, 2차뿌리의 연구
B. C. 1650	에짚트에서 한변수2차방정식의 풀이, 3각형, 4각형, 원의 면적, 평행6면체와 각뿔의 체적을 계산
B. C. 700	에짚트에서 선분의 황금분할, 합평균, 곱평균의 개념형성
	△ **초등수학단계**
B. C. 540	피다고라스(B. C. 570- B. C. 500, 그리스)학파가 피다고라스정리증명, 무리수 발견
B. C. 4세기 후반기	플라톤(B. C. 429- B. C. 347)학파가 귀유법을 발견
B. C. 280	아리스토텔레스(B. C. 384- B. C. 322, 그리스)가 공리개념제기, 론리학의 기본법칙들을 정식화 유클리드(B. C. 3세기, 그리스)가 13권으로 된 기하학의 《원론》을 집필, 이 책은 20세기 중엽까지 초등기하교과서의 기본내용으로 됨
B. C. 3세기	메소포타미아에서 수자 0을 사용
B. C. 225	아르키메데스(B. C. 287- B. C. 212, 그리스)가 면적과 체적을 구하는 방법을 발명하고 원과 타원의 면적, 구의 체적을 구하는 공식발견
B. C. 2세기	중국에서 246개의 수학문제를 9개의 장으로 나누어 묶어놓은 책 《구장 산술》이 나옴
B. C. 140	힙파크로스(그리스)가 삼각법을 발명, 지구로부터 달, 태양까지의 거리를 계산

년대	수학자와 발견, 발명내용
0	헤론(그리스-에집트)이 3각형의 면적을 구하는 헤론의 공식을 제기(사실 이공식은 이미 아르키메데스가 내놓았음)
100	메넬라우스(그리스-에집트)가 유클리드《원본》을 본따서 구면삼각을 발전시킴
150	프톨레미우스(그리스-에집트)가 고대삼각법을 종합
250	디오판투스(그리스-에집트)가 산수, 대수를 13권으로 종합한 책《산술》을 집필, 여기에 부정방정식도 들어있음
372	고구려에서 최고학교인 국자감을 조직하고 이 학교에서《산학》으로 수학을 교육
480	쭈충즈(중국)가 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$로 π의 값을 구하였음
499	마라브하타(인디아)가 1차부정방정식 $ax = by + c$ 의 자연수풀이를 구하는 방법을 발명
554	왕보선(백제)이 일본에 건너가 《구장산술》을 교육
700	백제의 왕도량, 고덕이 일본에 건너가 조선의 고전수학과 《구장산술》을 전파
7세기 말	신라의 국학에서 수학교재 《륙장》, 《삼개》, 《구장》, 《철술》을 교육
830	중앙아시아의 알 호레즈미가 1차, 2차 대수방정식의 풀이법에 관한 책을 집필
900	중앙아시아의 알 바타니가 시누스, 코시누스, 탕겐스, 코탕겐스 등 삼각의 학술용어를 만들고 구면3각형의 코시누스정리를 발견
992	고려의 최고학교(대학)인 국자감(1308년에 성균관으로 개칭)에 산사(수학전문가)를 양성하는 6년제학과를 두고 《구장》, 《사가》, 《천술》, 《삼개》를 교육

년대	수학자와 발견, 발명내용
1000	중앙아시아의 알 비루니가 시누스의 합(차)을 적으로 고치는 공식, 배각, 반각의 공식을 유도하고 시누스, 탕겐스 수표를 작성
12세기 중엽	브하스카라(인디아)가 조합의 개수계산공식을 유도
12세기	유럽에서 첫 대학들이 설립, 이딸리아의 볼로냐대학, 영국의 옥스포드대학
1209	피보나치(이딸리아)가 피보나치수렬 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+2}=a_0+a_{n+1}$ 을 제기
1260	중앙아시아의 나씨르에딘(1201-1274)이 시누스정리를 유도
1343	강보(조선)가 3차보간법을 발명(유럽에서는 1687년에 뉴톤이 처음으로 고차보간공식을 제기)
15세기전반기	리조정부의 호조에 산사(수학전문가)양성을 맡아보는 부서인 습산국을 설치, 학생수는 15명, 교재로는 《상명산법》, 《양휘산법》, 《산학계몽》
1433	조선에서 출판된 수학교재 《양휘산법》에서 $\frac{1}{2}$ 제곱의 근사계산에 변형된 접선법을 사용(유럽에서는 1669년에 뉴톤이 3차방정식을 풀기 위하여 처음으로 접선법을 사용)
1515	페르로(이딸리아)가 $x^3+bx=d$ 형태의 3차방정식풀이법을 발견하고 비밀에 붙임
1526	카르다노(이딸리아)가 확률의 더하기공식, 곱하기공식을 사용
1534	타르타글리아(이딸리아)가 일반적경우의 조합의 개수공식을 유도
1535	타르타글리아가 $x^3+ax^2=d$ 형태의 3차방정식의 풀이법을 발견하고 비밀에 붙임
1540	페라리(이딸리아)가 4차방정식의 풀이법을 발견하고 비밀에 붙임

년대	수학자와 발견, 발명내용
1572	봄벨리(이딸리아)가 그의 책《대수》에서 허수를 도입
1591	비에뜨(프랑스)가 4차이하의 대수방정식의 풀이와 결수사이의 관계에 관한 비에뜨공식을 유도
1614	네피어(1550-1617, 스코틀랜드)가 자연로그수를 발견, 로그수표의 작성
1615	케플레르(도이칠란드)가 회전체의 체적공식을 제기
1617	브리그스(영국)가 상용로그수표작성
1620	군떼르(영국)가 원형로그자를 발명
1625	자라드(네데를란드)가 구면3각형의 면적공식을 유도
1629	페르마(1601-1665, 프랑스)가 기하학에 자리표법을 도입
1630	오우트레드(영국)가 직선로그자를 발명
	△ **근대수학단계**
1635	까발리에리(이딸리아)가 면적원리, 체적원리(까발리에리원리)를 제기
1636	페르마가 페르마의 대정리를 정식화
1637	데까르뜨(1596-1650, 프랑스)가 자리표법을 도입하여 해석기하를 체계화
1639	데자르그(1593-1662, 프랑스)가 사영기하의 기본개념을 제기 빠스깔(1623-1662, 프랑스)이 원뿔곡선에 내접하는 6각형의 성질을 발견
1640	페르마가 페르마의 소정리를 정식화하고 $2^{2^n}+1$ 형태의 수가 씨수라는 가설을 제기
1641	빠스깔이 합산기를 발명
1648	데자르그가 사영기하학의 특수한 쌍대정리를 발견
1654-1657	빠스깔, 페르마, 회이헨스(네데를란드)가 확률론을 수학의 독자적인 분야로 발전시킴
1665-1666	뉴톤(1643-1716, 영국)이 미분적분법을 발견, 거의 같은 시기에 라이브니쯔(1646-1716, 도이칠란드)도 미적분법을 독자적으로 발견

년대	수학자와 발견, 발명내용
1670	그레고리(영국)가 삼각함수, 로그함수들을 제곱합렬로 전개
1674	라이브니쯔가 계산기를 발명
1676	라이브니쯔가 제곱함수의 미분과 적분공식을 유도
1677	라이브니쯔가 적분학의 기본공식을 발견
1679	라이브니쯔가 2진법을 제기
1684	라이브니쯔가 미분법을 론문으로 공개
1686	라이브니쯔가 적분법을 론문으로 공개
1687	뉴톤이 함수의 고차보간공식을 제기(우리 나라에서는 200~300년전에 3차보간법을 제기)
1691	뉴톤이 미적분을 해설한 론문 《곡선구적술》을 발표
1707	뫄브르(영국)가 복소수의 제곱의 편각과 절대값에 관한 뫄브르공식을 유도
1712	테일러(1685-1731, 영국)가 함수의 제곱합렬전개에 관한 테일러공식을 발견
1713	야꼬브 베르누이(1654-1705, 스위스)가 확률론의 큰수의 법칙을 발견
1728	오일레르(1707-1783, 스위스)가 고계상결수선형동차상미분방정식의 일반풀이를 구하는 방법을 제기
1729	오일레르가 Γ-함수와 B-함수를 발견
1731	끌레로(1713-1765, 프랑스)가 미적분을 리용하여 공간곡선론을 제기
1732	오일레르가 $2^{2^n}+1$ 이 씨수라는 페르마의 가설이 틀린다는것을 증명
1735	오일레르가 1계상미분방정식을 푸는 적분승수법을 발견
1736	오일레르가 7개다리에 관한 켄닉스부르그의 다리문제를 풀었고 페르마의 소정리를 증명
1739	오일레르가 2계선형비동차상미분방정식을 푸는 상수변화법을 발견

년대	수학자와 발견, 발명내용
1740	크라메르(1704-1752, 스위스)가 행렬식리론의 기초를 축성
1742	골드바흐(1690-1764, 도이췰란드)가 모든 홀수는 세 씨수들의 합으로, 모든 짝수는 두 씨수들의 합으로 표시된다는 가설을 제기
1743	심프손(1710-1761, 영국)이 적분의 근사계산법을 발명
1747	달람베르(1717-1783, 프랑스)가 줄의 진동편미분방정식을 유도
1748	달람베르가 복소수함수의 적분을 제기
1750	크라메르가 련립1차대수방정식의 풀이를 행렬식으로 표시하는 《크라메르공식》을 유도
18세기 중엽	홍대용(1713-1783, 조선)이 고차대수방정식의 근사풀이법을 발명, 수학책 《주해수용》을 집필
1761	람베르트(스위스)가 련분수를 리용하여 π 가 무리수라는것을 증명
1763	베이즈(영국)가 확률론의 2마디분포를 발표
1768	오일레르가 무리함수의 적분계산법을 찾고 2중적분을 정의
1773	라그랑쥬가 3중적분을 정의
1774	라그랑쥬가 고계선형비동차 미분방정식의 특수풀이를 구하는 상수변화법을 발견
1788	리규경(조선)이 수학발전력사를 개괄한 책 《수학의 시원》을 집필, 《기하학원본》을 조선말로 번역
1796	가우스(1777-1855, 도이췰란드)가 자와 콤파스만 가지고 바른17각형과 바른257각형을 작도할수 있다는것을 증명
1799	가우스가 대수학의 기본정리를 증명
1812	라쁠라스(1749-1827, 프랑스)가 확률론의 중심극한정리를 정식화

년대	수학자와 발견, 발명내용
1815	꼬쉬(1789-1857, 프랑스)가 치환군의 개념을 제기
1816	베쎌(1784-1846, 도이칠란드)이 특수함수리론을 세움
	△ **현대수학단계**
19세기초	남병길, 남병철(조선)이 구면삼각계산기구인《량도의》를 발명
1820	꼬쉬가 상미분방정식의 초기값문제풀이의 존재성정리를 발표
1822	꼬쉬가 극한론을 엄밀하게 서술하고 그에 기초하여 해석수학을 전개
1824	아벨(1802-1829, 노르웨이)이 5차이상의 일반대수방정식의 풀이공식에 의한 풀이의 불가능성을 증명
1826	로바체스끼(1792-1856, 로씨야)가 비유클리드기하학존재를 통보
1827	제르공(1771-1859, 프랑스)이 사영기하학에서 쌍대원리를 정식화
1829	슈투름(스위스)이 주어진 구간에 들어있는 대수방정식의 풀이의 개수에 관한 슈투름의 정리를 제기
1831	갈롸(1811-1832, 프랑스)가 치환군을 리용하여 임의의 차의 대수방정식의 풀이공식을 리용하여 풀리기 위한 필요충분조건을 제기, 군론과 체론의 기초를 마련
	꼬쉬가 꼬쉬의 적분공식을 유도
1832	볼랴이(1802-1860, 마쟈르)가 비유클리드기하학에 대한 착상을 발표
1835	하밀톤(1805-1865, 영국)이 복소수를 실수쌍으로 고찰하는 복소수의 형식리론을 제기
1837	빠쏭(1781-1840, 프랑스)이 확률론의 큰수법칙의 특수경우를 정식화

년대	수학자와 발견, 발명내용
1839	플류케르(도이췰란드)가 4차대수곡선을 152종류로 분류
1840	디리클레(1805-1859, 도이췰란드)가 평등수렴성개념을 제기
1843	켈리(1821-1895, 영국)가 n 차원선형공간의 개념을 도입
1844	그라스만(1809-1877, 도이췰란드)이 n 차원공간에서 벡토르해석의 기본개념을 제기 꼬쉬가 n 원선형련립상미분방정식의 풀이의 존재정리를 증명
1845	야꼬비(1804-1851, 도이췰란드)가 련립1차대수방정식을 푸는 한가지 방법인 《야꼬비법》을 제기
1847	부울(1815-1864, 영국)과 모르간(1806-1871, 영국)이 수리론리학의 기초를 마련 하밀톤이 《벡토르》라는 용어를 도입 키르흐호프(도이췰란드)가 전기회로와 관련된 그라프에 관한 연구결과를 발표
1848	꼬쉬가 1계련립편미분방정식의 적분법을 발견
1852	가슬리(대학생, 영국)가 4색문제를 설정
1854	리만(1826-1866, 도이췰란드)이 리만기하(다차원다양체에서의 미분기하)의 시초를 열어놓음
1855	리상혁(1810-?, 조선)이 수학책 《산술관견》을 집필
1857	꿈메르(도이췰란드)가 $3\leq n\leq 100$ 일 때 페르마의 대정리를 증명 리만이 정적분(리만적분)의 개념을 엄밀히 정식화
1858	켈리가 행렬론을 체계화 뫼비우스(1790-1868, 도이췰란드)가 뫼비우스띠(한쪽곡면)를 발견
1861	와이에르슈트라스(1815-1897, 도이췰란드)가 $\varepsilon-\delta$ 식으로 극한을 엄밀히 정의

년대	수학자와 발견, 발명내용
1867	남병길(1820-1869, 조선)이 수학책《산학정의》를 집필
1871	클라인(1849-1925, 도이췰란드)이 로바체프스끼기하학의 직관적모형을 제시
1872	리(노르웨이)가 유리수의 기본렬에 의한 실수론을 세움 클라인이 변환군에 기초하여 기하학을 분류하고 통일시킬것을 주장하는 《에를랑겐목록》을 발표
1873	칸토르(1845-1918, 도이췰란드)가 유리수모임의 농도가 자연수모임의 농도와 같다는것을 증명(가부번성) 에르미뜨(프랑스)가 수 e가 초월수라는것을 증명
1874	칸토르가 실수모임의 비가부번성을 증명 자이델(도이췰란드)이 련립1차대수방정식을 푸는 한가지 방법(자이델법)을 발명
1878	켈리가 추상유한군의 기초개념을 제시 칸토르가 자연수모임의 농도와 실수모임의 농도사이의 중간농도가 없다는 가설(련속체가설)을 제기
1882	린데만(도이췰란드)이 π가 초월수라는것을 증명
1883	칸토르가 모임론을 세움
1884	마르꼬브(로씨야)가 련분수론을 발전시킴
1885	볼떼라(1860-1940, 이딸리아)가 적분방정식리론의 기초를 축성
1887	죠르당이 곡선을 엄격히 정의 체비쉐브(로씨야)가 확률론의 중심극한정리의 한가지 충분조건을 제기
1890	힐베르트(1862-1943, 도이췰란드)가 대수적불변식론의 기본문제를 해결 뻬아노(1858-1932, 이딸리아)가 자연수의 공리를 정식화 하우드(영국)가 평면그라프의 5색정리를 증명하고 자루수가 n인 다문면의 색수공식을 가설로 제기(하우드가설)

년대	수학자와 발견, 발명내용
1891	헤프테르(도이췰란드)가 자루수가 $1 \leq r \leq 6$ 인 하우드가설을 증명
1894	빵까레가 n 차원대수적위상기하학에 관한 연구결과 발표
1896	아다마르(프랑스) 등이 씨수분포의 점근법칙을 증명
1897	켈리가 마디점수가 m 인 표식붙은 나무의 개수공식을 제기
1899	힐베르트가 초등기하학의 첫 공리계인《힐베르트공리계》를 제기 베르(프랑스)가 0차원공간개념을 도입
1900	힐베르트가 제2차국제수학자대회에서 수학에서 해결하여야 할 23개 문제를 제기
1901	덴(1878-1952, 도이췰란드)이 무한의 개념을 쓰지 않고 두 4면체에서 밑면적과 높이가 각각 같으면 그것들의 체적이 같다는 힐베르트의 3번문제를 해결
1902	랏쎌(1872-1970, 영국) 등이 당시의 모임론에서 모순을 발견
1904	빵까레가《3차원 단련결인 다양체(4차원공간에서의 다문면)는 3차원구면과 위상동형이다.》라는 가설 제기 쩨르멜로(1871-1953, 도이췰란드)가 선택공리제기 하우스드로프(1868-1942, 도이췰란드)가 위상공간의 개념 제기
1907	카라테오도리(1873-1950, 도이췰란드)가 볼록모임의 성질을 해명 민꼽쓰끼(1864-1909, 도이췰란드)가 4차원기하학을 리용하여 특수상대성리론을 기초화
1908	쩨르멜로가 모임론의 공리계(Z공리계)를 제기

년대	수학자와 발견, 발명내용
1910	슈타이니츠(1881-1966, 네데를란드)가 공리적방법으로 체론을 도입 리챠드슨(영국)이 련립1차대수방정식을 푸는 반복법을 제기
1911	브라우에르(1881-1966, 네데를란드)가 대수적위상기하학에 단체넘기와 단체근사를 도입 쩨르멜로가 장기경기를 리론적으로 연구
1912	뽕까레가 련속체의 차원수의 개념을 도입
1913	라돈(1887-1956, 오스트리아)이 스칠체스적분과 르베그적분을 르베그-스칠체스적분으로 통합
1916	베른슈테인(1880-1968, 로씨야)이 확률론의 첫 공리계를 제기
1917	위노그라도브(1891-1981, 로씨야)가 수론의 삼각합렬법을 개척 루진(1883-1950, 로씨야) 등이 해석적모임론을 전개
1918	폰 미제스(1885-1953, 오스트리아)가 확률론의 한가지 공리계를 제기
1919	브룬(노르웨이)이 쌍둥이씨수들의 거꿀수들의 합렬이 유한합렬이거나 수렴한다는것을 증명
1920	바나흐(1892-1945, 뽈스까)가 바나흐공간의 개념을 제기
1921	레프쉐츠(1884-1972, 도이췰란드)가 복소대수다양체리론을 제기
1922	프렌켈(1891-1965, 도이췰란드)이 모임론의 한가지 공리계(ZF공리계)를 제기 꾸라똡스끼(1890-1980, 뽈스까)가 페포를 공리화 헤쎄(1898-1979, 도이췰란드)가 힐베르트의 11번문제를 긍정적으로 해결
1923	위너가 브라운운동의 수학적모형으로 되는 우연과정개념을 제기

년대	수학자와 발견, 발명내용
1924	힌친(1894-1959, 로씨야)이 반복로그법칙을 발견
1925	폰 노이만(1903-1957, 마쟈르)이 구성적, 공리적 모임론을 전개
	네반린나(1895-1980, 핀란드)가 유리형함수의 령점의 개수를 평가
	우리손(로씨야)이 표준위상공간의 거리화가능성을 증명
1927	한(오스트리아)이 선형범함수의 연장정리를 제기
	바나흐 등이 평등유계성원리를 제기
1928	폰 노이만이 추상힐베르트공간을 정의
	폰 노이만이 경기론의 기본개념을 제기
1929	힌친이 표본평균값의 확률수렴성을 증명
1930	레프쉐츠가 무한개의 단체들로 이루어진 복체의 개념을 제기
	꼴모고로브가 강한 큰수법칙이 성립하기 위한 한가지 충분조건을 제기
1933	쎄베리(이딸리아)가 대수기하의 기초를 축성
	꼴모고로브가 확률론의 공리화를 완성
	피어슨(1895-1980, 영국) 등이 가설검정의 기초리론을 건설
1934	켈리폰드(1906-1968, 로씨야)가 힐베르트의 7번문제를 해결
	피어슨이 확률론의 베타분포를 제기
1935	겐첸(도이칠란드)이 증명론의 기본정리를 정식화
1936	제10차 국제수학자대회에서 알포스(핀란드), 더글라스(미국)에게 첫 필즈상이 수여됨
	겐첸이 자연수공리계의 무모순성을 증명
	튜링(1912-1954, 영국) 등이 수자형자동계산기의 원리를 제기

년대	수학자와 발견, 발명내용
1937	위노그라도브가 삼각합렬법으로 충분히 큰 모든 홀수는 세 씨수의 합으로 표시된다는것을 증명 스미르노브(로씨야)가 한가지 확률분포인 ω^2 – 분포를 제기
1938	뻬뜨롭스끼(1901-1973, 로씨야)가 고계련립편미분방정식에서 타원형, 쌍곡선형, 포물선형의 개념을 정의하고 꼬쉬문제의 타당성조건을 유도
1939	괴델(1906-1972, 오스트리아)이 련속체가설이 모임론의 공리계에 모순되지 않는다는것을 증명 겔디쉬(1911-1978, 로씨야) 등이 복소수함수를 비행기날개의 양력, 착륙때의 진동, 수중날개연구에 응용
1941	에르도슈(마쟈르) 등이 지정된 개수의 자연수들의 합으로의 지정된 자연수의 분할의 개수공식을 유도
1943	천성선(중국) 등이 닫긴리만다양체의 가우스-본네정리를 증명
1945	폰노이만 등이 통계적시행법을 발견
1946	이또(일본)가 합성우연과정의 미분공식, 리프쉬츠련속성을 가지는 우연미분방정식의 풀이의 존재성, 유일성을 증명
1947	라도(마쟈르)가 다문곡면의 면적 S와 이 곡면에 의하여 둘러싸인 공간부분의 체적 V사이에 $V^2 \le \dfrac{S^3}{36\pi}$ 인 관계를 증명
1949	거꿀탕겐스의 테일러전개공식을 리용하여 콤퓨터로 3일동안 계산하여 π를 2 037자리까지 계산
1951	쁘로호로브(로씨야)가 강한 큰 수법칙의 한가지 필요충분조건을 제기 스미르노브(로씨야) 등이 일반거리화 규준을 제기 펜첼(1905-1980, 단마르크)이 볼록함수에 관한 현대적리론을 확립

년대	수학자와 발견, 발명내용
1952	스티예펠(스위스) 등이 련립1차대수방정식을 푸는 공액그라디엔트법을 제기 듀링이 생물의 형태발생에 관한 수학적모형을 제기
1953	겔판드(로씨야) 등이 상결수포물선형미분방정식의 꼬쉬문제의 풀이의 유일성을 증명 겔판드 등이 상미분방정식의 경계값문제를 푸는 몰이법(분해법, 경계조건이동법)을 제기
1954	메이나르두스(도이췰란드)가 자연수들의 분할의 개수점근공식유도
1956	톰이 미분되는 넘기기의 특이점의 성질을 증명 꼴모고로브가 임의의 여러변수련속함수가 3변수련속함수들의 유한번의 합성으로 표시될수 있다는것을 증명 보골류보브(1909-1992, 로씨야)가 복소여러변수정칙함수의 해석원리를 발견 두브가 이또보다 약한 가정밑에서 우연미분방정식을 연구
1957	말그랑쥬(프랑스)가 유클리드공간에로의 다양체의 해석적넣기에 관한 정리를 증명 아놀드(로씨야)가 임의의 여러변수련속함수가 2변수련속함수들의 유한번의 합성으로 표시될수 있다는것을 증명
1958	세흐터(미국)가 고계타원형미분방정식의 풀이의 선험평가와 존재성을 증명 감그렐리제(로씨야)가 련립상미분방정식의 최량조종의 최대값원리를 제기
1959	스메일(미국)이 $5 \leq n$ 인 n 차원위상다양체에서 뽕까레가설을 증명 드 브레우(프랑스)가 경제균형리론에 공리화수법을 도입

년대	수학자와 발견, 발명내용
1960	로빈손(영국) 등이 자연수풀이를 가지는가, 가지지 않는가를 판정할수 없는 지수디오판투스방정식이 있다는것을 증명 칼만(마쟈르)이 신호렬의 려파리론을 제기 라브렌찌예브가 복소수함수론을 방향성발파에 응용
1961	스꼬로호드(우크라이나) 등이 이또보다 약한 가정밑에서 우연미분방정식의 풀이의 존재성, 유일성을 증명
1962	리재곤(1919-2007, 조선)이 다차원특이적분의 성질을 해명하고 다차원고계선형련립타원형편미분방정식의 경계값문제의 풀이의 선험평가, 기본풀이의 존재성을 증명
1963	조주경(1931-2002, 조선)이 이또가 준 가정보다 약한 가정밑에서 합성우연과정의 미분공식과 우연미분방정식의 풀이의 존재성, 유일성을 증명 코엔이 련속체가설을 해결
1964	노비꼬브(로씨야)가 n 차원($n \geq 5$)위상다양체를 분류(그후 우리 나라에서 $n = 2k+1$ 인 n 차원위상다양체는 n 차원구면 하나뿐이라는것을 증명함으로써 $n = 2k+1$, $n \geq 5$ 인 경우 노비꼬브의 위상다양체분류는 오유라는것을 밝힘)
1965	자데(이란)가 모호모임의 개념을 내놓고 모호수학을 개척
1966	팔레손이 그라프론에서 최대, 최소흐름의 알고리듬을 제기 모아가 근사수들의 계산에 관한 구간해석리론을 확립
1967	베이커(영국)가 대수적수들의 로그들의 1차형식이 초월수라는것을 증명 젠께위치(영국)가 유한요소법프로그람의 본보기를 제기
1968	베이커가 옹근수결수2변수n차동차기약대수방정식의 옹근수풀이의 한계를 제기

년대	수학자와 발견, 발명내용
	헨킨(프랑스)이 복소한변수함수의 꼬쉬적분표시공식을 복소여러변수함수의 경우에로 일반화
	링겔(미국), 양그스, 구스친 등 여러 수학자들이 2차원다양체 S_n의 색수공식에 관한 히우드의 가설을 40개의 단계를 거쳐 책 한권으로 증명(그후 우리 나라에서는 새로운 2차원의다양체들을 도입하여 단판치기로 증명)
	웬들란드(도이췰란드)가 경계요소법을 착상
1969	톰이 초등돌변을 7가지형태로 분류
	코엔(네데를란드)이 비마르꼬브봉사계를 연구하는 적분방정식법을 제기
	윌킨손(영국)이 0(nb^2)의 계산량을 가지는 띠폭 b인 n차대칭행렬의 일반화된 부분고유값의 고유값을 구하는 스펙트르분리법을 제기
1970	베이커가 임의의 제1종대수곡선의 모든 아낙점을 구하는 알고리듬을 제기
	마찌야쎄위치(로씨야)가 임의의 디오판투스방정식의 풀이의 존재성을 판정하는 유한알고리듬이 없다는것을 증명
1971	레베제브(로씨야)가 련립1차방정식을 푸는 리차드슨법의 불안정성을 극복하는 방도를 제기
1973	블렉크 등이 우연미분방정식을 리용하여 증권시세를 모형화
	벤수산(프랑스) 등이 준변분안갈기식의 개념을 제기
1975	리종욱(조선)이 선형계획법문제를 풀기 위한 축차절단법을 제기
	브란트(이스라엘)가 미분방정식, 적분방정식의 수값풀이를 위한 여러그물법리론을 제기
	깐또로위치(1912-1988, 로씨야) 등이 선형계획법을 리용하여 선형경제모형화를 제기

년대	수학자와 발견, 발명내용
1976	김성련(조선)이 미분경기문제의 수값풀이법을 제기
	하켄(미국) 등이 4색가설의 《콤퓨터에 의한 증명》제기(《수학적증명》은 아직 미해결)
	말리아윈(프랑스)이 유한차원공간에서의 초도함수개념을 무한차원공간으로 일반화
1977	필립뽀브(로씨야)가 포물선형편미분방정식에 대한 변분원리를 제기
	김교석(1926-1986, 조선)이 고차계획법을 제기
	만델브로트(미국)가 분수차원을 가지는 프락탈기하를 제기
1979	하치얀(로씨야)이 n개의 변수를 가진 선형계획법문제를 $0(n^6)$의 계산량에 의하여 푸는 타원체법을 제기
1980	송창호(조선)가 웰킨손의 스펙트르분리법을 써서 $0(nb^6)$의 계산량을 가지는 띠폭 b인 n차대칭행렬의 일반화된 부분고유값문제의 고유벡토르를 구함
	만델블로트가 계산실험으로 동력계에 카오스현상이 있다는것을 발견
1981	류충호(1920-1991, 조선)가 미분다양체에서 호몰로지와 쌍대호몰로지론을 발전시킴
1982	도날드슨(영국)이 4차원유클리드공간에는 보통의 미분구조와는 다른 미분구조가 더 있다는것을 발견
1983	웬들란드, 흐샤모가 점배치법에 기초한 경계요소법의 오차를 평가
	$260497542\times2^{6625}\pm1$이 그때까지 알려진 가장 큰 쌍둥이 씨수라는것이 증명됨
1984	왈리안트(단마르크)가 론리함수의 승법적표준형과 가법적표준형의 학습알고리듬의 복잡도를 평가
1985	도이츠(영국)가 량자계산모형을 제기
1986	리근배(조선)가 반미분되는 함수의 최소화문제를

년대	수학자와 발견, 발명내용
	풀기 위한 반그라디엔트법을 제기
	허달윤(조선) 등이 꼬임률이 있는 미분다양체의 기하학적구조와 비대칭접속기하학의 몇가지 문제들을 제기
	프라이(도이칠란드) 등이 다니야마의 가설의 특수경우로부터 페르마의 대정리가 나온다는것을 발견
1987	콜롬보(프랑스)가 곱하기를 자유롭게 할수 있도록 초함수리론을 발전시킴
	라만나얀의 반복법으로 콤퓨터를 며칠 가동하여 π를 1억 3 421만 7천자리까지 계산
1988	박태제(조선)가 대역적최소화문제를 풀기 위한 우연탐색법을 제기
1989	량서연(조선)이 다목적여러첨수운수문제의 풀이법을 제기
1990	까라쮸바(로씨야)가 씨수의 개수에 대한 평가를 현저히 개선
1992	서기영(조선)이 밀림과 미지함수의 공액복소수함수가 들어있는 특히미분적분방정식에 대한 뇌테르의 정리를 증명
1993	와일즈(영국)가 페르마 대정리를 증명
	끈쩨위치(로씨야)가 3차원다양체의 한가지 불변량을 제기
1995	보차즈(영국)가 1차분수변환군에 관한 자기동형함수와 유한군의 위수사이의 관계를 해명
1997	라포르그(프랑스)가 수론과 대수기하의 관계를 지어주는 3개의 가설을 증명
2000	정현빈(조선)이 초미분가능한다발에서 6가지초접속이 있다는것을 찾고 그 특성을 해명
2002	류해동(조선) 등이 1차원위상그라프론을 다차원에로 확장하고 4색가설의 《수학적증명》을 해결
2003	뻬렐만(로씨야)이 $n=3$에서 뽱까레가설을 증명

찾 아 보 기

▷ ㄱ ◁

▷ ㄹ ◁

▷ ㅁ ◁

▷ ㅂ ◁

▷ ㅅ ◁

▷ ㅈ ◁

▷ ㅊ ◁

▷ ㅋ ◁

▷ ㅌ ◁

▷ ㅍ ◁

▷ ㅎ ◁

▷ ㄸ ◁

▷ ㅃ ◁

▷ ㅆ ◁

▷ ㅉ ◁

▷ ㅇ ◁

수학편람(중학생용)

집 필 교수 박사 류해동
부교수 류영철, 김성철,
강철국, 김순남, 김영철,
변정학, 황철룡
심사 홍기숙, 리영호,
문영란
편 집 리혜경, 변정학
교정 한순희
장 정 홍경희
콤퓨터편성 홍경희

냰 곳 교육도서출판사
인쇄소 교육도서인쇄공장
인 쇄 주체100(2011)년 11월 5일
발 행 주체100(2011)년 11월 15일

교－11－보－273